의예 2/약학 2

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 약학과 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	합성함수, 정적분, 치환적분법
예상 소요 시간	의예과 25분 / 100분 ; 약학과 30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

문항 2 제시문 (ㄱ)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $f(x)$는 어떤 실수 α에 대하여 $f(f(\alpha))=\alpha$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(단, $p=\dfrac{\alpha+f(\alpha)}{2}$)

(가) $|\alpha-f(\alpha)|=4$

(나) $f(p)-p=4$

(다) $\displaystyle\int_{p}^{f(\alpha)} f(x)dx=12$

논제 (200점) 제시문 (ㄱ)의 α로 가능한 값을 모두 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 함수의 합성을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 주어진 구간에서 다항함수의 정적분을 구할 수 있는지를 확인한다.
3) 함수의 정적분을 치환적분법을 활용하여 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학] - (4) 함수 - 1 함수 [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [수학II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학 II 03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제	[수학II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학 II 03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2023	229-232
	수학	이준열 외	천재교육	2021	229-232
	수학	박교식 외	동아출판	2020	217-220
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2023	124-128
	수학 II	이준열 외	천재교육	2021	121-127
	수학 II	권오남 외	교학사	2021	134-138
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	132-136
	미적분	김원경 외	비상교육	2021	126-130
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	143-150

5. 문항 해설

1) 함수의 합성을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
2) 주어진 구간에서 다항함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.
3) 함수의 정적분을 치환적분법을 활용하여 구할 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해 $\alpha \neq f(\alpha)$이고 점 $A(\alpha, f(\alpha)), B(f(\alpha), \alpha)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점은 (p, p)로 직선 $y=x$ 위에 있다. $g(x)=f(x+p)-p$라 하고 이를 $g(x)=3x^3+ax^2+bx+c$로 나타내자. $f(p)-p=4$이므로 $g(0)=c=4$이다.	20
	(1) $\alpha < f(\alpha)$일 때 $f(\alpha)=\alpha+4$이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha+4), B(\alpha+4, \alpha)$이고 $p=\alpha+2$이다. $g(-2)=f(p-2)-p=f(\alpha)-\alpha-2=2$ $g(2)=f(p+2)-p=f(f(\alpha))-\alpha-2=\alpha-\alpha-2=-2$ 이므로 $g(-2)=4a-2b-20=2$ --- ① $g(2)=4a+2b+28=-2$ --- ② 이고, ①+②에서 $a=-1$, ②−①에서 $b=-13$, 즉 $g(x)=3x^3-x^2-13x+4$이다.	40
	$\displaystyle\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2(3x^3-x^2-13x+4)dx=-\frac{26}{3}$ 이므로 $\displaystyle\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx=\int_{\alpha+2}^{\alpha+4} f(x)dx$ $\displaystyle=\int_{\alpha+2}^{\alpha+4}(g(x-\alpha-2)+\alpha+2)dx$ $\displaystyle=\int_0^2 g(x)dx+2(\alpha+2)$ $\displaystyle=-\frac{26}{3}+2\alpha+4=12$ 을 만족한다. 따라서 $\alpha=\dfrac{25}{3}$이다.	50
	(2) $\alpha > f(\alpha)$일 때 $f(\alpha)=\alpha-4$이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha-4), B(\alpha-4, \alpha)$이고 $p=\alpha-2$이다. $g(-2)=f(p-2)-p=f(f(\alpha))-\alpha+2=2$ $g(2)=f(p+2)-p=f(\alpha)-\alpha+2=-2$ 이므로 $g(-2)=4a-2b-20=2$ $g(2)=4a+2b+28=-2$ 이므로 (1)에서와 마찬가지로 $g(x)=3x^3-x^2-13x+4$임을 알 수 있다.	40

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$\int_0^{-2} g(x)dx = \int_0^{-2}(3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{58}{3}$ 이므로 $\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx = \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(x)dx = \int_{\alpha-2}^{\alpha-4}(g(x-\alpha+2)+\alpha-2)dx$ $= \int_0^{-2} g(x)dx - 2(\alpha-2) = -\frac{58}{3} - 2\alpha + 4 = 12$ 이다. 따라서 $\alpha = -\frac{41}{3}$이다. 모든 경우를 고려하였으므로 가능한 α의 값은 $-\frac{41}{3}, \frac{25}{3}$이다.	50

7. 예시 답안

제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해 $\alpha \neq f(\alpha)$이고

점 $A(\alpha, f(\alpha)), B(f(\alpha), \alpha)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점은 (p, p)로 직선 $y=x$ 위에 있다.

$g(x) = f(x+p) - p$라 하고 이를 $g(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$로 나타내자.

$f(p) - p = 4$이므로 $g(0) = c = 4$이다.

(1) $\alpha < f(\alpha)$일 때,

$f(\alpha) = \alpha + 4$이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha+4), B(\alpha+4, \alpha)$이고 $p = \alpha + 2$이다.

$g(-2) = f(p-2) - p = f(\alpha) - \alpha - 2 = 2$

$g(2) = f(p+2) - p = f(f(\alpha)) - \alpha - 2 = \alpha - \alpha - 2 = -2$

이므로

$g(-2) = 4a - 2b - 20 = 2$ --- ①

$g(2) = 4a + 2b + 28 = -2$ --- ②

이고, ①+②에서 $a = -1$, ②−①에서 $b = -13$, 즉

$g(x) = 3x^3 - x^2 - 13x + 4$이다.

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{26}{3}$$

이므로

$$\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx = \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} f(x)dx = \int_{\alpha+2}^{\alpha+4}(g(x-\alpha-2)+\alpha+2)dx$$

$$= \int_0^2 g(x)dx + 2(\alpha+2) = -\frac{26}{3} + 2\alpha + 4 = 12$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha = \frac{25}{3}$이다.

(2) $\alpha > f(\alpha)$일 때

$f(\alpha)=\alpha-4$ 이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha-4)$, $B(\alpha-4, \alpha)$이고 $p=\alpha-2$이다.

$g(-2)=f(p-2)-p=f(f(\alpha))-\alpha+2=2$

$g(2)=f(p+2)-p=f(\alpha)-\alpha+2=-2$

이므로

$g(-2)=4a-2b-20=2$

$g(2)=4a+2b+28=-2$

이므로 (1)에서와 마찬가지로 $g(x)=3x^3-x^2-13x+4$임을 알 수 있다.

$$\int_0^{-2} g(x)dx=\int_0^{-2}(3x^3-x^2-13x+4)dx=-\frac{58}{3}$$

이므로

$$\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx=\int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(x)dx=\int_{\alpha-2}^{\alpha-4}(g(x-\alpha+2)+\alpha-2)dx$$

$$=\int_0^{-2} g(x)dx-2(\alpha-2)=-\frac{58}{3}-2\alpha+4=12$$

이다. 따라서 $\alpha=-\frac{41}{3}$이다.

모든 경우를 고려하였으므로, 가능한 α의 값은 $-\frac{41}{3}, \frac{25}{3}$이다.