자연·공학/간호학과 3

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연과학·공학계열 및 간호학과 / 문항 3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	등비급수, 여러 가지 함수의 미분, 여러 가지 미분법, 도함수의 활용, 여러 가지 적분법, 정적분의 활용
예상 소요 시간		30분 / 90분

2. 문항 및 제시문

문항 3 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 실수 a, M과 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수 t에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{e^{tn}}$은 $t \le a$이면 발산하고 $t > a$이면 수렴한다.

(나) $t > a$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 $x = t$에서의 함숫값은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{e^{tn}}$의 합과 같다.

(다) 구간 (a, ∞)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 M이다.

(ㄴ) 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에 속하고 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 α의 집합을 A라고 하자.

$$\frac{\cos\alpha}{e^{\cos\alpha}} \le \frac{\sin\alpha}{e^{\sin\alpha}}$$

(ㄷ) 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 다음과 같을 때, 두 곡선 $y = g(x)$, $y = h(x)$와 두 직선 $x = 0$, $x = 2\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

$$g(x) = e^{\cos x}\sin x,\ h(x) = e^{\sin x}\cos x$$

논제 1 (10점) 제시문 (ㄱ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (30점) 제시문 (ㄴ)의 집합 A와 제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

가) 등비급수의 합을 구할 수 있는지 확인한다.
나) 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소를 조사할 수 있는지 확인한다.
다) 치환적분을 활용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는지 확인한다.
라) 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
논제 1	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
논제 2	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외	천재교육	2021	29-189
	미적분	권오남 외	㈜교학사	2021	30-189
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	29-185

5. 문항 해설

1) 등비급수의 합을 구할 수 있는지 확인한다.
2) 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소를 조사할 수 있는지 확인한다.
3) 치환적분을 활용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는지 확인한다.
4) 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$은 첫째항과 공비가 $\frac{t}{e^t}$인 등비급수이다. 함수 $F(t)=\frac{t}{e^t}$에 대하여 $F'(t)=\frac{1-t}{e^t}$이므로 $F(t)=\frac{t}{e^t}$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가, 구간 $[1, \infty)$에서 감소하는 함수이고 $t=1$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가진다. 또한 $\lim_{t\to\infty}F(t)=0$, $\lim_{t\to-\infty}F(t)=-\infty$, $F(0)=0$이므로 조건 (가)로부터 $a<0$이고 $F(a)=-1$이다.	5

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	따라서 $t>a$ 인 실수 t에 대하여 $r=\frac{t}{e^t}$라고 하면 $-1<r\le\frac{1}{e}$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합은 $\frac{r}{1-r}$이다. 그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합은 $r=\frac{1}{e}$, 즉 $t=1$일 때 최대이며 그 합은 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e-1}$이다. $t>a$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 함숫값은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합과 같으므로 $M=\frac{1}{e-1}$이다.	5
논제 2	함수 $F(t)=\frac{t}{e^t}$가 구간 $(-\infty,1]$에서 증가하고, $\lvert\cos\alpha\rvert\le1, \lvert\sin\alpha\rvert\le1$이므로, $F(\cos\alpha)=\frac{\cos\alpha}{e^{\cos\alpha}}\le\frac{\sin\alpha}{e^{\sin\alpha}}=F(\sin\alpha)$일 필요충분조건은 $\cos\alpha\le\sin\alpha$이다.	8
	$0\le\alpha\le2\pi$이므로 $\cos\alpha\le\sin\alpha$일 필요충분조건은 $\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{5\pi}{4}$이다. 따라서 $A=\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$이다.	2
	$q(x)=g(x)-h(x)=e^{\cos x}\sin x-e^{\sin x}\cos x$라고 하면 구하고자 하는 도형의 넓이는 $S=\int_0^{2\pi}\lvert q(x)\rvert dx$이다.	2
	$e^{\cos x}>0, e^{\sin x}>0$이므로 $q(x)\ge0$일 필요충분조건은 $\frac{\cos x}{e^{\cos x}}\le\frac{\sin x}{e^{\sin x}}$이므로 $S=\int_0^{2\pi}\lvert q(x)\rvert dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}q(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}q(x)dx-\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}q(x)dx$이다.	5
	$u=\cos x$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=-\sin x$이므로 $\int g(x)dx=\int e^{\cos x}\sin x dx=-\int e^u du=-e^u+C=-e^{\cos x}+C$이고 $u=\sin x$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=\cos x$이므로 $\int h(x)dx=\int e^{\sin x}\cos x dx=\int e^u du=e^u+C=e^{\sin x}+C$이다. 따라서 $Q(x)=-e^{\cos x}-e^{\sin x}$는 $q(x)$의 한 부정적분이다.	8
	그러므로 $S=\int_0^{2\pi}\lvert q(x)\rvert dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}q(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}q(x)dx-\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}q(x)dx$ $=-\left(Q\left(\frac{\pi}{4}\right)-Q(0)\right)+\left(Q\left(\frac{5\pi}{4}\right)-Q\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(Q(2\pi)-Q\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ $=2\left(Q\left(\frac{5\pi}{4}\right)-Q\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$이다.	5

7. 예시 답안

논제 1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$은 첫째항과 공비가 $\frac{t}{e^t}$인 등비급수이다.

함수 $F(t)=\frac{t}{e^t}$에 대하여 $F'(t)=\frac{1-t}{e^t}$이므로 $F(t)=\frac{t}{e^t}$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가, 구간 $[1, \infty)$에서 감소하는 함수이고

$t=1$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가진다.

또한 $\lim_{t\to\infty}F(t)=0$, $\lim_{t\to-\infty}F(t)=-\infty$, $F(0)=0$이므로 조건 (가)로부터 $a<0$이고 $F(a)=-1$이다.

따라서 $t>a$인 실수 t에 대하여 $r=\frac{t}{e^t}$라고 하면 $-1<r\le\frac{1}{e}$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합은 $\frac{r}{1-r}$이다.

그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합은 $r=\frac{1}{e}$, 즉 $t=1$일 때 최대이며 그 합은 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e-1}$이다.

$t>a$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 함숫값은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{e^{tn}}$의 합과 같으므로 $M=\frac{1}{e-1}$이다.

논제 2

함수 $F(t)=\frac{t}{e^t}$가 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가하고, $|\cos\alpha|\le 1$, $|\sin\alpha|\le 1$이므로,

$F(\cos\alpha)=\frac{\cos\alpha}{e^{\cos\alpha}}\le\frac{\sin\alpha}{e^{\sin\alpha}}=F(\sin\alpha)$일 필요충분조건은 $\cos\alpha\le\sin\alpha$이다.

$0\le\alpha\le 2\pi$이므로 $\cos\alpha\le\sin\alpha$일 필요충분조건은 $\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{5\pi}{4}$이다.

따라서 $A=\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$이다.

$q(x)=g(x)-h(x)=e^{\cos x}\sin x-e^{\sin x}\cos x$라고 하면 구하고자 하는 도형의 넓이는 $S=\int_0^{2\pi}|q(x)|dx$이다.

$e^{\cos x}>0$, $e^{\sin x}>0$이므로 $q(x)\ge 0$일 필요충분조건은 $\frac{\cos x}{e^{\cos x}}\le\frac{\sin x}{e^{\sin x}}$이므로

$S=\int_0^{2\pi}|q(x)|dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}q(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}q(x)dx-\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}q(x)dx$이다.

$u=\cos x$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=-\sin x$이므로

$\int g(x)dx=\int e^{\cos x}\sin x dx=-\int e^u du=-e^u+C=-e^{\cos x}+C$이고

$u=\sin x$로 놓으면 $\frac{du}{dx}=\cos x$이므로

$\int h(x)dx = \int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{u}du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C$이다.

따라서 $Q(x) = -e^{\cos x} - e^{\sin x}$는 $q(x)$의 한 부정적분이다.

그러므로 $S = \int_{0}^{2\pi}|q(x)|dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}q(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}q(x)dx - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}q(x)dx$

$= -\left(Q\left(\frac{\pi}{4}\right) - Q(0)\right) + \left(Q\left(\frac{5\pi}{4}\right) - Q\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(Q(2\pi) - Q\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(Q\left(\frac{5\pi}{4}\right) - Q\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$이다.