자연·공학/간호학과 2

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학·공학계열 및 간호학과 / 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 극대와 극소, 도함수의 활용, 방정식과 부등식
예상 소요 시간	30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

문항 2 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 양의 실수 k에 대하여 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx+1$은 두 점에서 만나고, 만나는 두 점의 x좌표는 각각 $\alpha, 1$이다. (단, $\alpha<-1$)
>
> (나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx-1$은 두 점에서 만나고, 만나는 두 점의 x좌표는 각각 $-1, \beta$이다. (단, $\beta>1$)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 실수 k와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=f(x)-kx$$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 실수 c는 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=x^2+cx+c$는 두 점에서 만나고, 만나는 두 점의 x좌표는 각각 $t, 2$이다. (단, $t<2$)

논제 1 (15점) 제시문 (ㄴ)의 함수 $g(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (15점) 제시문 (ㄷ)의 c의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

가) 접선의 뜻을 알고 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는지 확인한다.
나) 함수의 극대, 극소의 의미를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 도함수를 활용하여 삼차방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학] (4) 함수 2 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
제시문 (ㄷ)	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
논제 1	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
논제 2	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2020	221-225
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	233-239
	수학	박교식 외	동아출판	2021	231-237
	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2021	67-96
	수학 II	김원경 외	비상교육	2021	71-92
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	72-96

5. 문항 해설

1) 접선의 뜻을 알고 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는지 확인한다.
2) 미분을 활용하여 함수의 극대, 극소를 알아낼 수 있는지 확인한다.
3) 미분을 활용하여 방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=1, y=-1$과 각각 접하므로 삼차함수 $g(x)$의 극값은 1과 -1이다.	3
	$g(x)$의 최고차항의 계수 a가 양수라고 하면 1이 극댓값이고 $g(\alpha)=g(1)=1,\ \alpha<1$이므로 $g'(\alpha)=0$이다. **-1이 극솟값이고 $g(-1)=g(\beta)=-1, -1<\beta$이므로 $g'(\beta)=0$이다.** **닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 $g(x)$는 감소하고 $g(-1)=g(\beta)=-1, -1<\beta$이므로 $-1<\alpha$이다.** **이는 문제의 조건에 위배 되므로 $a<0$이다.**	5
	그러므로 $g(\alpha)=g(1)=1,\ g'(1)=0,\ g(-1)=g(\beta)=-1, g'(-1)=0$이다.	2
	따라서 $g'(x)=3a(x^2-1)$, 즉 $g(x)=a(x^3-3x)+b$이고, $g(-1)=-1,\ g(1)=1$이므로 $2a+b=-1, -2a+b=1$이다. 따라서 $a=-\frac{1}{2},\ b=0$이고 $g(x)=-\frac{1}{2}(x^3-3x)$이다.	5
논제 2	삼차함수 $h(x)=f(x)-x^2-cx-c$에 대하여 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=0$는 두점에서 만나고 만나는 점의 x좌표가 각각 $t, 2$이므로 $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)$ 또는 $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2$이다.	5
	$f(x)-x^2-cx-c=-\frac{1}{2}x^3-x^2+(k-c+\frac{3}{2})x-c$ 이므로 각 경우 다음과 같다. 1) $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)$: $-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)=-\frac{1}{2}(x^3-2(t+1)x^2+(t^2+4t)x-2t^2)$이므로 $t+1=-1, t^2=-c, k-c+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(t^2+4t)$이다. 즉, $t=-2, c=-4, k=-\frac{7}{2}$ 이다.	4
	2) $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2$: $-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2=-\frac{1}{2}(x^3-(t+4)x^2+4(t+1)x-4t)$ 이므로 $\frac{t+4}{2}=-1, c=-2t, k-c+\frac{3}{2}=-2(t+1)$ 이다. 즉, $t=-6, c=12, k=\frac{41}{2}$ 이다.	4
	$k>0$ 이므로 $c=12$ 이다.	2

7. 예시 답안

논제 1

곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=1$, $y=-1$과 각각 접하므로 삼차함수 $g(x)$의 극값은 1과 -1이다.

$g(x)$의 최고차항의 계수 a가 양수라고 하면

1이 극댓값이고 $g(\alpha)=g(1)=1$, $\alpha<1$이므로 $g'(\alpha)=0$이다.

-1이 극솟값이고 $g(-1)=g(\beta)=-1$, $-1<\beta$이므로 $g'(\beta)=0$이다.

닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 $g(x)$는 감소하고 $g(-1)=g(\beta)=-1$, $-1<\beta$이므로 $-1<\alpha$이다.

이는 문제의 조건에 위배 되므로 $a<0$이다.

그러므로 $g(\alpha)=g(1)=1$, $g'(1)=0$, $g(-1)=g(\beta)=-1$, $g'(-1)=0$이다.

따라서 $g'(x)=3a(x^2-1)$, 즉, $g(x)=a(x^3-3x)+b$이고,

$g(-1)=-1$, $g(1)=1$이므로 $2a+b=-1$, $-2a+b=1$이다.

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$이고 $g(x)=-\frac{1}{2}(x^3-3x)$이다.

논제 2

삼차함수 $h(x)=f(x)-x^2-cx-c$에 대하여 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=0$는 두 점에서 만나고 만나는 점의 x좌표가 각각 t, 2이므로

$h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)$ 또는 $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2$이다.

$f(x)-x^2-cx-c=-\frac{1}{2}x^3-x^2+(k-c+\frac{3}{2})x-c$ 이므로 각 경우 다음과 같다.

1) $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)$:

$-\frac{1}{2}(x-t)^2(x-2)=-\frac{1}{2}(x^3-2(t+1)x^2+(t^2+4t)x-2t^2)$ 이므로

$t+1=-1$, $t^2=-c$, $k-c+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(t^2+4t)$이다. 즉, $t=-2$, $c=-4$, $k=-\frac{7}{2}$ 이다.

2) $h(x)=-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2$:

$-\frac{1}{2}(x-t)(x-2)^2=-\frac{1}{2}(x^3-(t+4)x^2+4(t+1)x-4t)$ 이므로

$\frac{t+4}{2}=-1$, $c=-2t$, $k-c+\frac{3}{2}=-2(t+1)$ 이다. 즉, $t=-6$, $c=12$, $k=\frac{41}{2}$ 이다.

$k>0$ 이므로 $c=12$ 이다.