02 자연과학·공학 계열

(단, 소비자주거학과, 의류학과, 아동학과 제외)

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 중심이 O 이고 반지름이 2 인 원에 내접하는 삼각형 ABC 는 다음을 만족시킨다.

$$4\sin B \sin(A+C) = 3$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 삼각형 ABC 에 대하여 점 D 가 다음을 만족시킬 때, 삼각형 ACD 의 둘레의 길이를 L 이라고 하자.

> (가) 점 D 는 제시문 (ㄱ)의 원 위의 점이다.
>
> (나) 삼각형 ACD 의 넓이는 삼각형 AOC 의 넓이의 3배이다.

논제 1 (30점) 제시문 (ㄴ)의 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0,\ \ f'(1)=1$
>
> (나) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.
>
> (다) 함수 $f(x)$는 극값을 가진다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le a$ 일 때 $g(x)=f(x)$ 이고
>
> $x > a$ 일 때 $g(x)=f(x+b)$ 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

논제 1 (15점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (15점) 제시문 (ㄴ)의 $a,\ b$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$은 자연수 K 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 등차수열이고 $a_K = b_K$ 이다.
>
> (나) $k \leq K$ 인 k에 대하여 $c_k = a_k$ 이다.
>
> (다) $k \geq K$ 인 k에 대하여 $c_k = b_k$ 이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{c_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ 라고 할 때, S_n 과 수열 $\{c_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $c_1 = -20$, $c_{12} > c_{11}$, $c_{16} = c_{17} + 6$
>
> (나) $S_{11} = 0$
>
> (다) S_n 의 최댓값은 S_{19} 이다.

논제 1 (20점) 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{c_n\}$에 대하여 c_7 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (20점) 제시문 (ㄴ)의 S_{19} 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제원칙

1 출제 방침

(1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

(2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2 출제 유형

(1) 지문제시형 문제를 출제한다.

(2) 제시문은 고교 교과서("수학", "수학 I", "수학 II")를 참조하여 구성한다.

(3) 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

(4) 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3 출제 의도

(1) [문항 1] 사인법칙을 이해하고 이를 활용하여 삼각형의 넓이 및 둘레를 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 함수가 극값을 가지는 조건을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한, 함수의 미분가능성을 이해하는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 등차수열의 공차와 일반항을 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한, 등차수열의 합을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

(2) 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1 기본 사항

(1) 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.

(2) 채점위원 2인이 1조가 되어 한 답안지를 1차와 2차로 나누어 채점하고, 1차 채점의 결과가 만점의 25% 이상의 차이가 날 경우 채점위원이 공동 합의로 2차 채점을 진행하고, 2차 채점에서 위원간의 조정이 이루어지지 않을 경우 3차 채점을 실시한다. 3차 채점은 출제위원을 포함한 새로운 채점위원 2인이 채점하되 1차 채점의 상위와 하위 점수 사이의 점수를 부여한다.

(3) 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2 세부 사항

(1) 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

(2) 각 문항 별 채점 기준은 다음과 같다.

예시답안

1 [문항 1] (30점)

논제 1 (30점)

$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$ 이므로 $4\sin B\sin(A+C)=3 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin B\sin B=3 \quad \Rightarrow$ $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(\because B<\pi)$ 이고, 주어진 원의 반지름이 $R=2$ 이므로 사인법칙에 의해, $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=2R=4 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{AC}}=4\sin B=2\sqrt{3}$ 이다.	10점
원의 중심 O 에서 삼각형 AOC 의 밑변 $\overline{\mathrm{AC}}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 삼각형 AOC 의 높이 $\overline{\mathrm{OH}}$ 는 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{OH}}=1$ 제시문 (ㄴ)에 의해 삼각형 ADC 의 넓이는 삼각형 AOC 의 넓이의 3배이므로 삼각형 ADC 의 높이는 삼각형 AOC 의 높이의 3배인 3이어야 하고 원의 반지름이 2이므로 점 D 는 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 수직 이등분선이 원과 만나는 점이어야 한다.	10점
따라서, 삼각형 ADC 는 높이가 3인 정삼각형이므로 구하고자 하는 삼각형 ADC 의 둘레의 길이는 $6\sqrt{3}$ 이다.	10점

2 [문항 2] (30점)

논제 1 (15점)

$h(x)=f(x)-x$ 라 하자. $h(0)=f(0)-0=0$ 이고 방정식 $h(x)=f(x)-x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이므로 $h(x)=x^2(x-\alpha)$ 또는 $h(x)=x(x-\alpha)^2$ 이다. (단, $\alpha \neq 0$)	3점
1) $h(x)=x^2(x-\alpha)$ 인 경우: $f(x)=x^2(x-\alpha)+x$ 이고 $f'(x)=3x^2-2\alpha x+1$ 이다. 따라서 $1=f'(1)=4-2\alpha$, 즉 $\alpha=\dfrac{3}{2}$ 이다. $f'(x)=3x^2-3x+1$ 에서 $D/4=9-12<0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이다. 즉 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.	4점
2) $h(x)=x(x-\alpha)^2$ 인 경우: $f(x)=x(x-\alpha)^2+x$ 이고 $f'(x)=3x^2-4\alpha x+\alpha^2+1$ 이다. 따라서 $1=f'(1)=\alpha^2-4\alpha+4$, 즉 $(\alpha-1)(\alpha-3)=0$ 이다. (i) $\alpha=1$ 인 경우: $f'(x)=3x^2-4x+2$ 에서 $D/4=4-6<0$ 이므로 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다. (ii) $\alpha=3$ 인 경우: $f'(x)=3x^2-12x+10$ 에서 $D/4=36-30>0$ 이므로 $f(x)$ 는 극값을 가진다. 따라서 $f(x)=x^3-6x^2+10x$ 이다.	8점

논제 2 (15점)

제시문 (ㄴ)의 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $\lim_{x \to a-} g(x) = \lim_{x \to a+} g(x)$이고 $\lim_{x \to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$이다. $\lim_{x \to a-} g(x) = f(a)$, $\lim_{x \to a+} g(x) = f(a+b)$, $f(a) = f(a+b)$이므로 이고, $\lim_{x \to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)$, $\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x+b)-f(a+b)}{(x+b)-(a+b)} = f'(a+b)$이므로 $f'(a) = f'(a+b)$이다.	5점
이차 방정식 $f'(x) = f'(a)$의 서로 다른 두 실근이 a, $a+b$이고 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$이므로 근과 계수의 관계로 부터 두 근 a, $a+b$의 합은 $2a+b=4$, 즉 $a+b=4-a$이다. 그런데 b가 양수이므로 $a < a+b = 4-a$, 즉 $a<2$이다. $f(x)-f(a) = (x-a)(x^2+(a-6)x+a^2-6a+10)$이고 $a+b=4-a$가 방정식 $f(x)-f(a)=0$의 한 근이므로 $(4-a)^2+(a-6)(4-a)+a^2-6a+10=0$이다. 즉, $a^2-4a+2=0$이므로 $a = 2 \pm \sqrt{2}$이다. $a<2$이므로 $a = 2-\sqrt{2}$이고 $b = 4-2a = 2\sqrt{2}$이다. 따라서 $a = 2-\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$이다.	10점

3 [문항 2] (40점)

논제 1 (20점)

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1, 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d_2라고 하면, S_n이 $n=19$일 때 최댓값을 가지므로 d_2는 양수가 아님을 알 수 있다. 또한 c_1이 음수이므로, d_1이 양수가 아니면 모든 c_n이 음수이므로 S_n은 $n=1$일 때 최댓값을 가지게 되어 모순이 된다. 따라서 $d_1>0$, $d_2 \le 0$이고 $c_{16}=c_{17}+6$에서 $d_2=-6$, $K \le 16$임을 알 수 있다.	10점
또한 S_n이 $n=19$일 때 최댓값을 가지므로 $c_{19} \ge 0$, $c_{20} \le 0$을 만족한다. 만일 $K \le 11$이라고 하면, $0 \le c_{19} = c_{11} + (19-11)d_2$에서 $c_K \ge c_{11} \ge 48$을 만족하고 $c_1 = -20$이므로 $$S_K = \frac{K(-20+c_K)}{2} \ge \frac{K(-20+48)}{2} > 0 \text{ 이고,}$$ $K \le k \le 11$일 때 $c_k \ge c_{11}$이므로 $S_{11} \ge S_K > 0$이 되어 모순이다. 따라서 $K > 11$이고 $$S_{11} = \frac{11(-40+10d_1)}{2} = 0 \text{ 으로부터}$$ $d_1 = 4$임을 알 수 있다. 따라서 $c_7 = -20 + 6d_1 = 4$이다.	10점

논제 2 (20점)

논제 1로 부터 $c_1, \cdots, c_K$는 공차가 4인 등차수열을 이루고, $c_K, c_{K+1}, \cdots$은 공차가 -6인 등차수열을 이루므로 $n \ge K$를 만족하는 n에 대하여 $$\begin{aligned} c_n &= c_K + (n-K)d_2 \\ &= -20+4(K-1)-6(n-K) \\ &= -24+10K-6n \end{aligned}$$ 이다.	10점
$c_{19} \ge 0$, $c_{20} \le 0$이므로 $$K \ge 13.8,\ \ K \le 14.4$$ 따라서 $K=14$이다.	5점
이때 $$\begin{aligned} S_{19} &= S_{13} + (S_{19} - S_{13}) \\ &= \frac{13\times(-40+4\times 12)}{2} + \frac{6\times(64+5\times(-6))}{2} \\ &= 52+102 = 154 \end{aligned}$$	5점