[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$는 다음을 만족한다.

> (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(13, 2)$를 지난다.
> (2) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x-3$에 대하여 대칭이다.
> (3) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+5$에 대하여 대칭이다.

(ㄴ) 함수 $y=f(x)$의 그래프에 대하여 x축에 평행한 점근선을 l, y축에 평행한 점근선을 m이라고 하자.

(ㄷ) 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q, 직선 m에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.

논제 1. (10점) 상수 a, b, c의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 점 P, Q, R에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 다음을 만족한다. (단, n은 자연수)

함수 $f(x)=(-1)^n(x^3-3x^2+3x-12n^4x+2)$는 $x=a_n$에서 극대이다.

(ㄴ) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 S라고 하자.

$$S=\sum_{n=1}^{10} a_n$$

논제 1. (15점) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄴ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 다항함수 f, g는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = x^3 + x^2 + 5x - 7$$

$$g(x) = 2x^2 - x - 1$$

(ㄴ) 실수 a에 대하여 다항함수 h는 다음과 같이 정의된다.

$$h(x) = f(x) - a\,g(x)$$

(ㄷ) 방정식 $h(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 모든 실수 a의 집합을 A라고 하자.

(ㄹ) 실수 a의 값이 정해졌을 때, 방정식 $h(x) = 0$의 가장 작은 실근을 α, 가장 큰 실근을 β라고 하자.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 방정식 $h(x) = 0$이 중근을 가지도록 하는 모든 실수 a에 대하여 $\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|\,dx$의 최솟값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제원칙

1 출제 방침

(1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.
(2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2 출제 유형

(1) 지문제시형 문제를 출제한다.
(2) 제시문은 고교 교과서(“수학”, “수학 Ⅰ”, “수학 Ⅱ”)를 참조하여 구성한다.
(3) 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.
(4) 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3 출제 의도

(1) [문항 1] 유리함수를 이해하고 이를 활용할 수 있는 지를 평가하였다. 또한, 절대부등식을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다.
[문항 2] 함수의 극값을 구하고 이를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 수열의 일반항과 합을 구할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다.
[문항 3] 인수분해를 이용해 함수의 근을 찾고 이를 활용할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 함수를 적분하고 이를 활용할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다.
(2) 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는 지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1 기본 사항

(1) 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.**

(2) 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.
① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점
② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2 세부 사항

(1) 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.
(2) 각 문항 별 채점 기준은 다음과 같다.

예시답안

1 [문항 1] (30점)

(논제 1) (10점)

제시문 (ㄱ)의 조건 (2), (3)에 의해 직선 $y=x-3$과 직선 $y=-x+5$의 교점인 $(4,\ 1)$이 두 점근선의 교점이므로, 점근선은 $x=4,\ y=1$이다.	5점
따라서, 어떤 상수 k에 대하여 $f(x)=\dfrac{k}{x-4}+1$로 쓸 수 있고, 제시문 (ㄱ)의 조건 (1)에 의해 $2=f(13)=\dfrac{k}{13-4}+1$을 만족하므로 $k=9$임을 알 수 있다. 따라서, $f(x)=\dfrac{9}{x-4}+1=\dfrac{x+5}{x-4}$이고, $a=-4,\ b=1,\ c=5$이다.	5점

(논제 2) (20점)

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점근선 $y=1$에 내린 수선의 발은 Q, 점근선 $x=4$에 내린 수선의 발은 R이다. $\overline{\mathrm{PQ}}=\lvert x-4\rvert$, $\overline{\mathrm{PR}}=\lvert y-1\rvert$이고, $\mathrm{P}(x,y)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 논제 1에 의해 다음을 만족시킨다. $$y-1=\frac{9}{x-4}$$	10점
$\overline{\mathrm{PQ}}$와 $\overline{\mathrm{PR}}$는 양수이므로, 절대부등식에 의해 $$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\lvert x-4\rvert+\lvert y-1\rvert=\lvert x-4\rvert+\frac{9}{\lvert x-4\rvert}\geq 2\sqrt{\lvert x-4\rvert\frac{9}{\lvert x-4\rvert}}=6$$ 이고, 등호조건 $\lvert x-4\rvert=\lvert y-1\rvert=3$을 만족하는 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 곡선 $y=f(x)$위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 6이다.	10점

2 [문항 2] (30점)

(논제 1) (15점)

제시문 (ㄱ)에서 주어진 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=(-1)^n(3x^2-6x+3-12n^4)$이고 인수분해하면 $f'(x)=3(-1)^n(x-(1-2n^2))(x-(1+2n^2))$이다.	7점
이 때 $1-2n^2<1+2n^2$이므로, n이 홀수이면 최고차항이 음수가 되어 $f(x)$는 $x=1+2n^2$에서 극대이고, n이 짝수이면 최고차항이 양수가 되어 $f(x)$는 $x=1-2n^2$에서 극대이다. 그러므로 일반항은 $a_n=1-2(-1)^n n^2$이다.	8점

(논제 2) (15점)

a_n은 n이 홀수일 때 $1+2n^2$이고 n이 짝수일 때 $1-2n^2$이므로	5점
S는 다음과 같이 계산할 수 있다. $S=\sum_{n=1}^{10}(1-2(-1)^n n^2)=10+2\sum_{k=1}^{5}((2k-1)^2-(2k)^2)$ $=10+2\sum_{k=1}^{5}(-4k+1)=20-8\times\frac{5\times 6}{2}=-100$	10점

3 [문항 3] (40점)

(논제 1) (20점)

$f(1)=g(1)=0$이므로 실수 a의 값에 관계없이 $h(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다. $h(x)=(x-1)(x^2+2x+7-a(2x+1))=(x-1)(x^2+2(1-a)x+7-a)$로 인수분해를 하고, 편의상 $k(x)=x^2+2(1-a)x+7-a$라고 하자. 이제 이차방정식 $k(x)=0$이 1을 근으로 갖지 않으면서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a를 구하면 된다.	10점
1. $k(1)=10-3a\neq 0$이므로 $a\neq\frac{10}{3}$이다. 2. 판별식 $(1-a)^2-7+a=a^2-a-6=(a+2)(a-3)$이 양수이므로 $a<-2$ or $a>3$ 이다. 따라서, $A=\left\{a \middle\vert a<-2 \text{ or } 3<a<\frac{10}{3} \text{ or } \frac{10}{3}<a\right\}$이다.	10점

(논제 2) (20점)

논제 1에 의해 방정식 $h(x)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 a는 $-2,\ 3,\ \dfrac{10}{3}$ 이렇게 세 개가 있다. $a=-2$이면, $\alpha=-3,\ \beta=1$이고, $a=3$이면 $\alpha=1,\ \beta=2$이고, $a=\dfrac{10}{3}$이면 $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{11}{3}$이다.	10점
우선 $\displaystyle\int_1^2 \lvert g(x)\rvert dx < \int_1^{\frac{11}{3}} \lvert g(x)\rvert dx$임은 당연하다. $g(x)=(x-1)(2x+1)$이므로 $x>1$ 혹은 $x<-\dfrac{1}{2}$이면 $\lvert g(x)\rvert = g(x)$이다.	5점
또한, 이차함수가 축에 대하여 대칭이라는 사실과 $-\dfrac{1}{2}-(-3)>2-1$이라는 사실로부터 $\displaystyle\int_{-3}^{1} \lvert g(x)\rvert dx > \int_{-3}^{-\frac{1}{2}} \lvert g(x)\rvert dx > \int_1^2 \lvert g(x)\rvert dx$임을 알 수 있다. 따라서 최솟값은 $\displaystyle\int_1^2 \lvert g(x)\rvert dx = \int_1^2 (2x^2-x-1)dx = \frac{2}{3}\times(8-1)-\frac{1}{2}\times(4-1)-1=\frac{13}{6}$ 이다.	5점