2022학년도 가톨릭대학교 착한 모의논술전형

자연과학·공학계열(단 공간디자인·소비자학과, 의류학과, 아동학과 제외) 및 간호학과

※ 모의논술전형 문항은 출제경향의 참고용으로 실제 논술전형과 난이도, 출제범위 등에서 다를 수 있습니다. 반드시, 전년도 논술전형 문항을 참고하여 2022학년도 가톨릭대학교 논술전형을 준비해주시기 바랍니다. 전년도 논술전형 가이드북은 본교 입학 홈페이지를 통해 다운로드 받을 수 있습니다.

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 다음 조건을 모두 만족시키는 양수 a, b, c에 대하여 $\frac{2\pi}{a}+\frac{b}{2\pi}$의 최솟값을 m이라 하고, $\frac{2\pi}{a}+\frac{b}{2\pi}=m$인 a, b의 값을 각각 α, β라 하자.

> (i) 함수 $y=c\sin(ax)+b$의 최댓값은 9이다.
>
> (ii) 함수 $y=a\cos(bx)+c$의 최댓값은 8이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

> $f(x)=\tan(\alpha x-\beta)$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$에 대하여 상수 p는 다음 조건을 만족시킨다.

> (i) 직선 $x=p$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선이다.
>
> (ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 임의의 점근선 $x=q$에 대하여 $|p|\le|q|$이다.

[논제 1] (15점) 제시문 (ㄱ)의 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[논제 2] (15점) 제시문 (ㄷ)의 p의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) **[함수의 극한, 좌극한, 우극한]** 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 L이면, 함수의 극한의 정의에 의하여 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재하면서 그 값이 모두 L과 같다. 또, 그 역도 성립한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$$

(ㄴ) **[미분계수]** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이 때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하며 이것을 기호 $f'(a)$로 나타낸다.

(ㄷ) 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(|x|)-f(0)}{x}$이 존재한다.

(ㄹ) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(i) 함수 $y=g(|x|)$는 모든 실수 x의 값에서 미분가능하다.

(ii) 함수 $y=g(|x|)$는 $x=3$에서 극솟값 6을 가진다.

[논제 1] (15점) 제시문 (ㄷ)의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오

[논제 2] (15점) 제시문 (ㄹ)의 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) **[수학적 귀납법]** 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ㄴ) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$은 다음과 같다.

모든 자연수 m에 대하여 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 이다.

(ㄷ) 모든 실수 c에 대하여 다음의 부등식을 만족시키는 자연수 n의 집합을 A라고 하자.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx>0$$

[논제 1] (20점) 제시문 (ㄴ)의 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.
[논제 2] (20점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 과정을 논술하시오.

출제원칙

1. 출제 방침

가. 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

나. 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2. 출제 유형

가. 지문제시형 문제를 출제한다.

나. 제시문은 고교 교과서("수학", "수학 I", "수학 II")를 참조하여 구성한다.

다. 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

라. 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

가. [문항 1] 삼각함수의 최댓값 및 점근선을 활용할 수 있는지를 평가하였다. 또한, 절대부등식을 활용하고 이를 이해할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 함수의 극한과 미분가능성에 대해 이해하고 이를 적용할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 정적분의 개념과 수학적 귀납법을 사용할 수 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

나. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 자연과학·공학계열 과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는 지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1. 기본 사항

가. 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.**

나. 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2. 세부 사항

가. 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

나. 각 문항 별 채점 기준은 다음과 같다.

예시답안

[문항 1] [30점]

[논제 1] (15점)

양수 a, b, c에 대해 $y=c\sin(ax)+b$와 $y=a\cos(bx)+c$의 최댓값이 각각 9, 8이므로

$$c+b=9$$

$$a+c=8$$

이다. 두 식을 연립하면 $b=a+1$이고,

$$\frac{2\pi}{a}+\frac{b}{2\pi}=\frac{2\pi}{a}+\frac{a+1}{2\pi}=\frac{2\pi}{a}+\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}$$

이다.

5점

한편, $a>0$이므로 절대부등식에 의해

$$\frac{2\pi}{a}+\frac{b}{2\pi}=\frac{2\pi}{a}+\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\geq 2\sqrt{\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{2\pi}}+\frac{1}{2\pi}=2+\frac{1}{2\pi}$$

이고, 등호가 성립할 조건은 $\frac{2\pi}{a}=\frac{a}{2\pi}$이다. 이를 만족하는 $a=2\pi$이고, 이 때의 $b=2\pi+1>0$, $c=8-a=8-2\pi>0$이므로 $m=2+\frac{1}{2\pi}$, $\alpha=2\pi$, $\beta=2\pi+1$이다.

10점

[논제 2] (15점)

논제 1에 의해 $\alpha=2\pi$, $\beta=2\pi+1$이므로 $y=\tan(\alpha x-\beta)=\tan(2\pi x-2\pi-1)$의 점근선은 $x=\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$ (n은 정수) 이다.

5점

한편, $n\geq 0$일 때 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}>0$이고, $n\leq -1$일 때 $\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\leq -\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}<0$이고, $\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\right|>\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\right|$이므로 $p=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$이다.

10점

예시답안

[문항 2] [30점]

[논제 1] (15점)

극한값 $\lim_{x\to0}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}$이 존재하므로 제시문 (ㄱ)에 의해 좌극한 $\lim_{x\to0-}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}$과 우극한 $\lim_{x\to0+}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}$이 모두 존재하고, 같은 값을 가진다. 이 때 좌극한은 $\lim_{x\to0-}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}$ 이고, 우극한은 $\lim_{x\to0+}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 이다.	5점
그런데 $f(x)$가 다항함수이므로 극한값 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$가 존재하고 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 이다. 따라서 좌극한은 $\lim_{x\to0-}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$이고, 우극한은 $\lim_{x\to0+}\frac{f(\lvert x\rvert)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 이다.	5점
그러므로 $-f'(0)=f'(0)$ 이다. 즉, $f'(0)=0$ 이다.	5점

[논제 2] (15점)

함수 $y=g(\|x\|)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{g(\|x\|)-g(0)}{x}$가 존재한다. 따라서, 논제 1에 의해 $g'(0)=0$ 이다. 그런데, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $g'(x)=3x^2+ax$ 이다. 즉, $g(x)=x^3+\frac{a}{2}x^2+g(0)$ 이다.	5점
함수 $y=g(\|x\|)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지고 $x>0$일 때 $g(\|x\|)=g(x)$이므로 함수 $y=g(x)$도 $x=3$에서 극솟값을 가진다. 따라서 $g'(3)=0$이고 $g(3)=6$이다. $g'(3)=0$이므로 $a=-9$이다. 따라서 $g(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+g(0)$이고, $g(3)=27\left(1-\frac{3}{2}\right)+g(0)=-\frac{27}{2}+g(0)=6$ 이므로 $g(0)=\frac{39}{2}$ 이다.	5점
따라서 $g(1)=1-\frac{9}{2}+\frac{39}{2}=16$ 이다.	5점

예시답안

[문항 3] [40점]

[논제 1] (20점)

(i) $n=1$일 때, $\int_0^1 x^m(1-x)dx=\int_0^1 x^m dx-\int_0^1 x^{m+1}dx$ $=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m!1!}{(m+2)!}$ 이므로 $p(n)$은 성립한다.	6점
(ii) $n=k$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $\int_0^1 x^m(1-x)^{k+1}dx=\int_0^1 x^m(1-x)^k(1-x)dx$ $=\int_0^1 x^m(1-x)^k dx-\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^k dx$ $=\frac{m!k!}{(m+k+1)!}-\frac{(m+1)!k!}{(m+k+2)!}$ $=\frac{m!k!}{(m+k+2)!}(m+k+2-m-1)=\frac{m!(k+1)!}{(m+k+2)!}$ 이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 성립한다.	14점

[논제 2] (20점)

제시문 (ㄴ)의 적분식을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 적분을 계산하면, $\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(1+2\sqrt{3}\,cx+\frac{27}{10}c^2x^2\right)dx$ $=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx+2\sqrt{3}\,c\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n dx+\frac{27}{10}c^2\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n dx$ $=\frac{n!n!}{(2n+1)!}+2\sqrt{3}\frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!}c+\frac{27}{10}\frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!}c^2$ $=\frac{n!n!}{(2n+1)!(2n+3)}\left(2n+3+(2n+3)\sqrt{3}\,c+\frac{27}{20}(n+2)c^2\right)$ 을 얻는다.	8점
따라서 제시문 (ㄷ)의 부등식은 위 괄호안의 c에 대한 이차식이 양수이어야 한다는 것과 동치이다. c^2항의 계수가 양수이므로, 판별식이 음수가 되어야 한다. 판별식은 $3(2n+3)^2-\frac{27}{5}(2n+3)(n+2)$ $=\frac{2n+3}{5}(15(2n+3)-27(n+2))=\frac{2n+3}{5}(3n-9)$ 이므로, $n<3$이 되어야 조건을 만족시킨다.	8점
따라서 제시문 (ㄷ)의 집합 A는 $\{1,\ 2\}$이다.	4점