4 의예과

의예 1

일반 정보

출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 확률, 조건부확률
예상 소요 시간	25분 / 100분	

문항 및 제시문

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 상자 A에는 검은 공 1개와 흰 공 4개가 들어 있고 상자 B에는 검은 공 3개와 흰 공 2개가 들어 있다. 서로 다른 주사위 3개를 동시에 던져 나온 눈의 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차이가 2 또는 4이면 상자 A에서, 아니면 상자 B에서 공을 하나 뽑는 시행을 두 번 반복한다. (단, 뽑힌 공은 상자에 다시 넣지 않는다.)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 시행에 대하여 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률을 p, 첫 번째 시행에서 흰 공이 나왔을 때 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률을 q라고 하자.

논제. (170점) 제시문 (ㄴ)의 p와 q의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제 의도

본 문제는 확률, 조건부확률의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.
확률의 합의 법칙를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 또 조건부확률을 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	262–277
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	261–272
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	249–260
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2021	44–70
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021	43–66
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2021	43–70

문항 해설

확률의 계산을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다. 또, 조건부확률을 구할 수 있는지 평가한다.

채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>주사위 3개를 던져 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 3과 1로 차이가 2인 경우는 (1, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 3)이고 경우의 수는 $3+6+3=12$이다.
또, 4와 2, 5와 3, 6과 4로 차이가 나는 경우의 수도 각각 12이므로 차이가 2인 경우의 수는 $12*4=48$이다.
같은 방법으로 5와 1로 차이가 4인 경우는 (1, 1, 5), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (1, 5, 5)이고 경우의 수는 $3+6+6+6+3=24$이고 6과 2로 차이가 4인 경우의 수도 24이므로 차이가 4인 경우의 수는 48이다.</td><td>40</td></tr>
<tr><td>즉, 주사위 3개를 던져 상자 A가 선택될 확률은
$$\frac{48+48}{6^3}=\frac{4}{9}$$
따라서 구하는 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은
$$p=\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{19}{45}$$</td><td>40</td></tr>
<tr><td>첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우는 다음 표의 4가지이고 각각 확률은 표와 같다.
<table><tr><th>첫 번째 흰 공</th><th>두 번째 검은 공</th><th>확률</th></tr><tr><td>상자 A</td><td>상자 A</td><td>$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}$</td></tr><tr><td>상자 A</td><td>상자 B</td><td>$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}$</td></tr><tr><td>상자 B</td><td>상자 A</td><td>$\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}$</td></tr><tr><td>상자 B</td><td>상자 B</td><td>$\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}$</td></tr></table></td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>그러므로 첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은
$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{73}{3\times5\times9\times2}$$</td><td>20</td></tr>
<tr><td>따라서 구하는 조건부확률 q는
$$q=\frac{\frac{73}{3\times5\times9\times2}}{\frac{26}{45}}=\frac{73}{156}$$</td><td>30</td></tr>
</table>

예시 답안

주사위 3개를 던져 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 3과 1로 차이가 2인 경우는 (1, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 3)이고 경우의 수는 $3+6+3=12$이다. 또, 4와 2, 5와 3, 6과 4로 차이가 나는 경우의 수도 각각 12 이므로 차이가 2인 경우의 수는 $12*4=48$이다.

같은 방법으로 5와 1로 차이가 4인 경우는 (1, 1, 5), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (1, 5, 5)이고 경우의 수는 $3+6+6+6+3=24$이고 6과 2로 차이가 4인 경우의 수도 24이므로 차이가 4인 경우의 수는 48이다.

즉, 주사위 3개를 던져 상자 A가 선택될 확률은

$$\frac{48+48}{6^3}=\frac{4}{9}$$

이다.

따라서 구하는 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은

$$p=\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{19}{45}$$

이다.

첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우는 다음 표의 4가지이고 각각 확률은 표와 같다.

첫 번째 흰 공 상자	두 번째 검은 공 상자	확률
상자 A	상자 A	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}$
상자 A	상자 B	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}$
상자 B	상자 A	$\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}$
상자 B	상자 B	$\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}$

그러므로 첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{73}{3\times5\times9\times2}$$

따라서 구하는 조건부확률 q는

$$q=\frac{\frac{73}{3\times5\times9\times2}}{\frac{26}{45}}=\frac{73}{156}$$

이다.

의예 3

일반 정보

출제 범위	수학과 교육과정 과목명	중학교 수학1, 고등학교 수학, 고등학교 수학 I, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	소수, 소인수분해, 정수, 순열과 조합, 원순열, 여러 가지 수열의 합
예상 소요 시간	25분 / 100분	

문항 및 제시문

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 학생 A와 B를 포함하는 $k+2$명으로 구성된 동아리에 대하여 아래 경우의 수를 a_k라고 하자. (단, k는 3이상인 자연수이다.)

> 학생 A, B를 포함하여 동아리 학생 5명을 뽑아 원탁에 앉힐 때
> A와 B가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 a_k와 3보다 큰 소수 p에 대하여 다음 집합 S의 가장 작은 원소를 b_k라고 하자.

$$S=\left\{m \mid m \text{는 } m \geq \frac{a_k}{p} \text{ 인 자연수}\right\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 p와 b_k에 대하여 L는 다음과 같다.

$$L=\sum_{k=3}^{p-1} b_k$$

논제. (180점) 제시문 (ㄷ)의 합 L를 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제 의도

가) 순열과 조합, 원순열을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.
나) 집합의 개념 및 표현방법을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.
다) 소수, 소인수분해, 정수와 유리수의 뜻을 알고 활용할 수 있는지를 확인한다.
라) 합의 기호의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
중학교 교과서	수학1	이준열 외	천재교육	2020	11–57
	수학1	강옥기 외	동아출판	2020	11–67
	수학1	김화경 외	좋은책 신사고	2020	13–56
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	172–192, 262–276
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	175–188, 261–273
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	165–179, 249–260
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2021	143–150
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2021	141–153
	수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2021	133–140
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021	11–18
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2021	10–20
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11–19

문항 해설

1) 조합과 원순열을 이용하여 주어진 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.
2) 소수, 소인수분해, 정수의 개념을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 평가한다.
3) 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">논제</td><td>동아리에서 학생 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_{k}\mathrm{C}_{3} = \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}$,
이웃하는 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3!$, 이웃하는 두 학생 A, B가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이다. 따라서 제시문 (ㄴ)의 a_k는 다음과 같다.
$$a_k = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \times 3! \times 2 = 2k(k-1)(k-2)$$</td><td>40</td></tr>
<tr><td>제시문 (ㄷ)의 L을 구하기 위해
$$b_k - \frac{a_k}{p} = c_k \qquad (k = 3, 4, \cdots, p-1)$$
라고 하자. 그러면 $0 \le c_k < 1$이다.

한편, $2 \le l \le p-1$인 자연수 l에 대하여 $l < p$이므로 $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 a_k는 3보다 큰 소수 p를 약수로 갖지 않는다.
만약 $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 $\dfrac{a_k}{p}$이 자연수 q이라면 $a_k = qp$가 되어 자연수를 소인수분해한 결과는 곱하는 순서를 생각하지 않으면</td><td>50</td></tr>
</table>

하위 문항	채점 기준	배점
논제	오직 한 가지뿐이라는 것에 모순이다. 따라서 $\frac{a_k}{p}$는 자연수가 아니다. 즉, $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 $$0 < c_k < 1\text{이고 } 0 < c_k + c_{p+2-k} < 2$$	
	한편, $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 $$c_k + c_{p+2-k} = b_k + b_{p+2-k} - \left(\frac{a_k}{p} + \frac{a_{p+2-k}}{p}\right)$$ $$= b_k + b_{p+2-k} - 2\left(p^2 - 3(k-1)p + 3k^2 - 6k + 2\right)$$ 이고 이 값이 정수이므로 $$c_k + c_{p+2-k} = 1 \qquad (k = 3, 4, \cdots, p-1)$$ 따라서 $$\sum_{k=3}^{p-1} c_k = \sum_{k=3}^{p-1} c_{p+2-k} = \frac{p-3}{2}$$	50
	그러므로 제시문 (ㄷ)의 L은 다음과 같다. $$L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k = \sum_{k=3}^{p-1} \frac{a_k}{p} + \sum_{k=3}^{p-1} c_k = \frac{2}{p}\sum_{k=3}^{p-1} k(k-1)(k-2) + \frac{p-3}{2}$$ $$= \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-2}\left(k^3 - k\right) + \frac{p-3}{2} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2} + \frac{p-3}{2}$$ $$= \frac{(p-3)\left(p^2 - 3p + 3\right)}{2}$$	40

예시 답안

동아리에서 학생 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_k\mathrm{C}_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$, 이웃하는 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3!$, 이웃하는 두 학생 A, B가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이다. 따라서 제시문 (ㄴ)의 a_k는 다음과 같다.

$$a_k = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \times 3! \times 2 = 2k(k-1)(k-2)$$

제시문 (ㄷ)의 L을 구하기 위해

$$b_k - \frac{a_k}{p} = c_k \qquad (k = 3, 4, \cdots, p-1)$$

라고 하자. 그러면 $0 \le c_k < 1$이다.

한편, $2 \le l \le p-1$인 자연수 l에 대하여 $l < p$이므로 $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 a_k는 3보다 큰 소수 p를 약수로 갖지 않는다. 만약 $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여 $\frac{a_k}{p}$이 자연수 q이라면 $a_k = qp$가 되어 자연수를 소인수분해한 결과는 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이라는 것에 모순이다. 따라서 $\frac{a_k}{p}$는 자연수가 아니다. 즉, $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여

$$0 < c_k < 1 \text{이고 } 0 < c_k + c_{p+2-k} < 2$$

한편, $3 \le k \le p-1$인 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned} c_k + c_{p+2-k} &= b_k + b_{p+2-k} - \left(\frac{a_k}{p} + \frac{a_{p+2-k}}{p}\right) \\ &= b_k + b_{p+2-k} - 2\left(p^2 - 3(k-1)p + 3k^2 - 6k + 2\right) \end{aligned}$$

이고 이 값이 정수이므로

$$c_k + c_{p+2-k} = 1 \qquad (k = 3, 4, \cdots, p-1)$$

따라서

$$\sum_{k=3}^{p-1} c_k = \sum_{k=3}^{p-1} c_{p+2-k} = \frac{p-3}{2}$$

그러므로 제시문 (ㄷ)의 L은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k &= \sum_{k=3}^{p-1} \frac{a_k}{p} + \sum_{k=3}^{p-1} c_k = \frac{2}{p}\sum_{k=3}^{p-1} k(k-1)(k-2) + \frac{p-3}{2} \\ &= \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-2}\left(k^3 - k\right) + \frac{p-3}{2} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2} + \frac{p-3}{2} \\ &= \frac{(p-3)\left(p^2 - 3p + 3\right)}{2} \end{aligned}$$

의예 4

일반 정보

출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	연속, 극대, 극소, 함수의 증가와 감소, 도함수의 활용, 함수의 그래프, 부정적분, 정적분
예상 소요 시간	30분 / 100분	

문항 및 제시문 [문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 상수 n에 대하여 명제 p는 다음과 같다.

> 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지고 $x=\beta$에서 극솟값 0을 가지면 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$는 열린구간 (α, β)에서 n개의 실근을 갖는다.

(ㄴ) 최고차항의 계수 k가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$의 모든 실근은 a, b, c, d, e이고
> $f(b)=f(d)$이다. (단, $a<b<c<d<e$)
> (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

이 함수 $f(x)$와 실수 k, a, b, c에 대하여 $m=k(b-a)f(2b-c)$라고 하자.

논제. (180점) 제시문 (ㄱ)의 명제 p가 참이 되도록 하는 n의 값이 있는지 판별하고, 있는 경우 n의 값을 구하시오. 또한 제시문 (ㄴ)의 m의 값을 구하시오. 이 모든 과정의 근거를 논술하시오.

출제 의도

가) 함수의 극대, 극소의 의미를 활용할 수 있는지 확인한다.
나) 방정식의 근의 존재성 문제에 사잇값정리를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2021	12-154
	수학 Ⅱ	박교식	동아출판	2021	11-152
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11-155

문항 해설

1) 함수의 극대, 극소의 의미를 알고 이를 활용하여 삼차함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 확인한다.
2) 사잇값정리와 함수의 증가, 감소를 활용하여 구간에서 방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.
3) 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지고 $x=\beta$에서 극솟값 0을 가진다고 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수 k가 양수라고 하자. $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지고 $x=\beta$에서 극솟값 0을 가지므로 $f'(x)=3k(x-\alpha)(x-\beta)$이고 $f(\beta)=0$, $\alpha<\beta$이다. 따라서 $f(x)=\int_{\beta}^{x} f'(t)dt+f(\beta)$ $=k(x-\beta)^3+\frac{3(\beta-\alpha)k}{2}(x-\beta)^2=k(x-\frac{3\alpha-\beta}{2})(x-\beta)^2$ 이다. $\alpha\le t\le\beta$인 실수 t에 대하여 x에 관한 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근 중 가장 작은 근 x를 $g(t)$라고 하고 $h(t)=t-f(t)-g(t)$라고 하자. $\alpha<t<\beta$인 t에 대해서 $f(t)>0$이므로 $t-f(t)<t$이고 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근 x중 t보다 작은 근은 $g(t)$가 유일하므로 $\alpha<t<\beta$일 때 $f(t-f(t))=f(t)$일 필요충분조건은 $t-f(t)=g(t)$, 즉, $h(t)=0$인 것이다. 따라서 열린구간 (α, β)에서 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$의 실근의 개수는 열린구간 (α, β)에서 방정식 $h(x)=0$의 실근의 개수와 같다.	30
	$f(x)=k(x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x-\frac{1}{2}\beta^2(3\alpha-\beta))$이고 $f(x)-f(t)=k(x-t)(x^2+\frac{1}{2}(2t-3\alpha-3\beta)x+3\alpha\beta+t^2-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)t)$ 이므로 $g(t)$는 이차방정식 $x^2+\frac{1}{2}(2t-3\alpha-3\beta)x+3\alpha\beta+t^2-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)t=0$의 두 근 중 더 작은 근이다. 그러므로 근의 공식에 의해 $g(t)=(3(\alpha+\beta)-2t-\sqrt{3(3\beta-\alpha-2t)(\beta-3\alpha+2t)})/4$이고, $\alpha\le t\le\beta$에서 $g(t)$는 연속이다. 따라서 $h(t)=t-g(t)-f(t)$도 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이다. $h(\alpha)=\alpha-\alpha-f(\alpha)<0$이고	30

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$h(\beta)=\beta-g(\beta)-f(\beta)=\beta-g(\beta)=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)>0$이므로 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $h(t)=0$인 실수 t가 적어도 하나 존재한다.	
	$\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$에 대해서 $g(t_1) \le \alpha$, $g(t_2) \le \alpha$이고, 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)$는 감소하므로 $f(g(t_1))=f(t_1)>f(t_2)=f(g(t_1))$이고, 구간 $(-\infty,\alpha]$에서 $f(x)$는 증가하므로 $g(t_1)>g(t_2)$이다. 즉, 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $g(t)$는 감소한다. 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(t)$, $g(t)$는 감소하므로 $h(t)=t-g(t)-f(t)$는 증가하는 연속함수이다. 따라서 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $h(t)=0$인 실수 t의 개수는 1이다. 따라서 $n=1$일 때 명제 p가 참이다. 즉, 명제 p가 참이 되도록 하는 n의 값은 있으며, 그 값은 1이다.	30
	제시문 (ㄴ)의 함수를 $f(x)$라고 하면 위의 논의로부터 $f(x)=k\left(x-\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)(x-\beta)^2$이다. 따라서 극댓값을 $M=f(\alpha)$라고 하면 $f(x)-M=k(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$이다. $\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$라고 하자. 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$ -------------------- (*) 의 근 x를 다음의 경우로 나누어 생각하자. i) $x-f(x)=x$인 경우 : $f(x)=0$을 만족하는 x는 $x=\frac{3\alpha-\beta}{2}$ 또는 $x=\beta$이고 이 경우는 위 방정식 (*)의 근이 된다. ii) $x-f(x)\neq x$인 경우 : $x-f(x)\neq x$이고 $f(x-f(x))=f(x)$라고 하자.	30

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$f(x) \neq 0$이고 서로 다른 $x-f(x)$와 x에서의 f의 함숫값이 같으므로 $0 < f(x) \leq M$이다. 따라서 $x-f(x) < x$이고 $f(x-f(x)) = f(x)$이므로 $\alpha < x \leq \gamma$이다. (단, $x \neq \beta$) 방정식 (*)의 i)에서의 두 근이 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$, β이고 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2} < \alpha < \beta$이므로 방정식 (*)의 근 중 가장 작은 값은 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$이고 나머지 근은 모두 α보다 크다. 즉, $a = \dfrac{3\alpha-\beta}{2}$이고 $\alpha < b$이다. 위의 논의로부터 방정식 (*)는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 유일한 근을 가지므로 b가 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서의 방정식 (*)의 유일한 근임을 알 수 있다. 즉, $b < \beta$이다. 그런데 $x = \beta$도 방정식 $f(x-f(x)) = f(x)$의 근이고 $b < \beta$이므로 $c = \beta$이다. 따라서 $b < \beta = c < d$이고 $f(d) = f(b) > 0$임을 알 수 있다.	
	$f(b-f(b)) = f(b) = f(d) = f(d-f(d))$이고 $b-f(b) < b < d$ 이므로 $b-f(b)$, b, $d-f(d)$, d는 모두 방정식 $f(x) = f(b)$의 근이고, $b-f(b)$, b, d는 서로 다르다. 그런데 $b-f(b) < d-f(d) < f(d)$이므로 $d-f(d) = b$이다. 그러므로 $d-b = f(d) = f(b)$이다. $d-b = q > 0$라고 하면 $q = f(d) = f(b)$이고 방정식 $f(x) = f(b)$의 서로 다른 세 실근은 $b-q$, b, $b+q$이다. 따라서 $f(x)=k(x-b+q)(x-b)(x-b-q)+f(b)=k((x-b)^3-q^2(x-b))+q$ 이다.	30

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$f'(x)=k(3(x-b)^2-q^2)=3k(x-b-\frac{q}{\sqrt{3}})(x-b+\frac{q}{\sqrt{3}})$이므로 $b+\frac{q}{\sqrt{3}}=\beta=c$, $b-\frac{q}{\sqrt{3}}=\alpha$이고 $a=\frac{3\alpha-\beta}{2}=b-\frac{2}{\sqrt{3}}q$이다. $0=f(\beta)=f(b+\frac{q}{\sqrt{3}})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}kq^3+q$이므로 $k=\frac{3\sqrt{3}}{2q^2}$이다. $f(2b-c)=f(b-\frac{q}{\sqrt{3}})=\frac{3\sqrt{3}}{2q^2}(\frac{2}{3\sqrt{3}}q^3)+q=2q$이므로 $m=k(b-a)f(2b-c)=\frac{3\sqrt{3}}{2q^2}\times\frac{2q}{\sqrt{3}}\times 2q=6$이다.	30

예시 답안

삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지고 $x=\beta$에서 극솟값 0을 가진다고 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수 k가 양수라고 하자.

$f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지고 $x=\beta$에서 극솟값 0을 가지므로

$f'(x)=3k(x-\alpha)(x-\beta)$이고 $f(\beta)=0$, $\alpha<\beta$이다.

따라서

$$f(x)=\int_{\beta}^{x}f'(t)dt+f(\beta)=k(x-\beta)^3+\frac{3(\beta-\alpha)k}{2}(x-\beta)^2=k(x-\frac{3\alpha-\beta}{2})(x-\beta)^2\text{이다.}$$

$\alpha\le t\le\beta$인 실수 t에 대하여 x에 관한 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근 중 가장 작은 근 x를 $g(t)$라고 하고 $h(t)=t-f(t)-g(t)$라고 하자.

$\alpha<t<\beta$인 t에 대해서 $f(t)>0$이므로 $t-f(t)<t$이고

방정식 $f(x)=f(t)$의 실근 x 중 t보다 작은 근은 $g(t)$가 유일하므로

$\alpha<t<\beta$일 때 $f(t-f(t))=f(t)$일 필요충분조건은 $t-f(t)=g(t)$, 즉, $h(t)=0$인 것이다.

따라서 열린구간 (α, β)에서 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$의 실근의 개수는 열린구간 (α, β)에서 방정식 $h(x)=0$의 실근의 개수와 같다.

$$f(x)=k(x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x-\frac{1}{2}\beta^2(3\alpha-\beta))\text{이고}$$

$$f(x)-f(t)=k(x-t)(x^2+\frac{1}{2}(2t-3\alpha-3\beta)x+3\alpha\beta+t^2-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)t)\text{이므로}$$

$g(t)$는 이차방정식 $x^2+\frac{1}{2}(2t-3\alpha-3\beta)x+3\alpha\beta+t^2-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)t=0$의 두 근 중 더 작은

근이다. 그러므로 근의 공식에 의해

$g(t)=(3(\alpha+\beta)-2t-\sqrt{3(3\beta-\alpha-2t)(\beta-3\alpha+2t)})/4$이고, $\alpha\le t\le\beta$에서 $g(t)$는

연속이다. 따라서 $h(t)=t-g(t)-f(t)$도 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이다.

$h(\alpha)=\alpha-\alpha-f(\alpha)<0$이고 $h(\beta)=\beta-g(\beta)-f(\beta)=\beta-g(\beta)=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)>0$이므로

사잇값 정리에 의해 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $h(t)=0$인 실수 t가 적어도 하나 존재한다.

$\alpha\le t_1<t_2\le\beta$에 대해서 $g(t_1)\le\alpha,\ g(t_2)\le\alpha$이고, 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)$는 감소하므로

$f(g(t_1))=f(t_1)>f(t_2)=f(g(t_1))$이고 구간 $(-\infty,\alpha]$에서 $f(x)$는 증가하므로 $g(t_1)>g(t_2)$

이다. 즉, 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $g(t)$는 감소한다.

닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(t),\ g(t)$는 감소하므로 $h(t)=t-g(t)-f(t)$는 증가하는 연속함수이다.

따라서 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $h(t)=0$인 실수 t의 개수는 1이다.

따라서 $n=1$일 때 명제 p가 참이다.

즉, 명제 p가 참이 되도록 하는 n의 값은 있으며, 그 값은 1이다.

제시문 (ㄴ)의 함수를 $f(x)$라고 하면 위의 논의로부터 $f(x)=k\left(x-\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)(x-\beta)^2$이다. 따라서

극댓값을 $M=f(\alpha)$라고 하면 $f(x)-M=k(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$이다. $\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$라고 하자.

방정식

$$f(x-f(x))=f(x) \quad \text{--------------------------} \quad (*)$$

의 근 x를 다음의 경우로 나누어 생각하자.

i) $x-f(x)=x$인 경우 : $f(x)=0$을 만족하는 x는 $x=\frac{3\alpha-\beta}{2}$ 또는 $x=\beta$이고
이 경우는 위 방정식 $(*)$의 근이 된다.

ii) $x-f(x)\neq x$인 경우 : $x-f(x)\neq x$이고 $f(x-f(x))=f(x)$라고 하자.
$f(x)\neq 0$이고 서로 다른 $x-f(x)$와 x에서의 f의 함숫값이 같으므로 $0<f(x)\le M$이다.
따라서 $x-f(x)<x$이고 $f(x-f(x))=f(x)$이므로 $\alpha<x\le\gamma$이다. (단, $x\neq\beta$)

방정식 $(*)$의 i)에서의 두 근이 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$, β이고 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}<\alpha<\beta$이므로 방정식 $(*)$의 근 중 가장 작은 값은 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$이고 나머지 근은 모두 α보다 크다. 즉, $a=\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$이고 $\alpha<b$이다.

위의 논의로부터 방정식 $(*)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 유일한 근을 가지므로 b가 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서의 방정식 $(*)$의 유일한 근임을 알 수 있다. 즉, $b<\beta$이다.

그런데 $x=\beta$도 방정식 $f(x-f(x))=f(x)$의 근이고 $b<\beta$이므로 $c=\beta$이다.

따라서 $b<\beta=c<d$이고 $f(d)=f(b)>0$임을 알 수 있다.

$f(b-f(b))=f(b)=f(d)=f(d-f(d))$이고 $b-f(b)<b<d$이므로 $b-f(b)$, b, $d-f(d)$, d는 모두 방정식 $f(x)=f(b)$의 근이고, $b-f(b)$, b, d는 서로 다르다.

그런데 $b-f(b)<d-f(d)<f(d)$이므로 $d-f(d)=b$이다.

그러므로 $d-b=f(d)=f(b)$이다.

$d-b=q>0$라고 하면 $q=f(d)=f(b)$이고 방정식 $f(x)=f(b)$의 서로 다른 세 실근은 $b-q$, b, $b+q$이다.

따라서 $f(x)=k(x-b+q)(x-b)(x-b-q)+f(b)=k((x-b)^3-q^2(x-b))+q$이다.

$f'(x)=k(3(x-b)^2-q^2)=3k(x-b-\dfrac{q}{\sqrt{3}})(x-b+\dfrac{q}{\sqrt{3}})$이므로

$b+\dfrac{q}{\sqrt{3}}=\beta=c$, $b-\dfrac{q}{\sqrt{3}}=\alpha$이고 $a=\dfrac{3\alpha-\beta}{2}=b-\dfrac{2}{\sqrt{3}}q$이다.

$0=f(\beta)=f(b+\dfrac{q}{\sqrt{3}})=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}kq^3+q$이므로 $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2q^2}$이다.

$f(2b-c)=f(b-\dfrac{q}{\sqrt{3}})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2q^2}(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}q^3)+q=2q$이므로

$m=k(b-a)f(2b-c)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2q^2}\times\dfrac{2q}{\sqrt{3}}\times 2q=6$이다.