II. 2021학년도 가톨릭대학교 착한 모의논술전형
자연과학·공학계열 및 간호학과(자연)

자연과학·공학계열 및 간호학과(자연)

모의논술전형 문항은 출제경향의 참고용으로 실제 논술전형과 난이도, 출제범위 등에서 다를 수 있습니다. 반드시, 전년도 논술전형 문항을 참고하여 2021학년도 가톨릭대학교 논술전형을 준비해주시기 바랍니다. 전년도 논술전형 가이드북은 본교 입학 홈페이지를 통해 다운로드 받을 수 있습니다.

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

삼각형 ABC에서 세 각 $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$의 크기를 각각 A, B, C라 하고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

(ㄱ) [사인법칙] 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(ㄴ) [코사인법칙] 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

(ㄷ) 다음 조건을 만족하는 삼각형 ABC의 넓이 S에 대하여 $\dfrac{S}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$의 최댓값을 M이라 하자.

$$2\sin A\cos C=\sin B$$

논제 1. (20점) 제시문 (ㄷ)의 조건을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 논술하시오.

논제 2. (10점) 제시문 (ㄷ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) **[확률의 덧셈정리]** 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

이다. 특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cup B)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

(ㄴ) **[이산확률변수의 기댓값]** 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i \ \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, X의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

(ㄷ) 어떤 주머니에 1또는 2가 하나씩 적힌 붉은 공과 파란 공이 여러 개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내는 시행에서 꺼낸 공이 붉은 공인 사건을 A, 꺼낸 공에 적힌 수가 1인 사건을 B라고 하고, 꺼낸 공에 적힌 수를 확률변수 X라고 하자. 이때 사건 A와 B, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

i) 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ii) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{5}$

iii) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{7}{4}$

논제 1. (15점) 제시문 (ㄷ)의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄷ)의 시행에서 2가 적힌 붉은 공을 꺼낼 확률을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ㄴ) 양의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

(ㄷ) 명제 A는 다음과 같다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$이다.

(ㄹ) 자연수 n에 대하여 다음 집합 B의 원소 중 가장 큰 수를 a_n이라고 하자.

$$B = \left\{\alpha \mid \alpha\text{는 방정식 } x^3 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2 + x - e = 0 \text{ 의 실근}\right\} \cup \{\sqrt{e}\}$$

논제 1. (20점) 제시문 (ㄱ), (ㄴ)을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 명제 A의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄹ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제원칙

1. 출제 방침

가. 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

나. 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2. 출제 유형

가. 지문제시형 문제를 출제한다.

나. 제시문은 고교 교과서("수학", "수학 I", "수학 II", "미적분", "확률과 통계")를 참조하여 구성한다.

다. 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

라. 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

가. [문항 1] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하였다. 또한, 삼각함수를 이용한 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 확률의 개념을 알고 이를 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 확률의 덧셈정리, 사건의 독립성, 확률변수의 기댓값 등의 개념을 알고 이를 적용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 정적분의 개념을 이용하여 수열의 일반항이 가지는 범위와 극한값을 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 함수의 증가, 감소와 사잇값 정리를 이용하여 주어진 방정식의 해의 존재성을 설명할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

나. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1. 기본 사항

가. 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산한다.**

나. 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2. 세부 사항

가. 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

나. 각 문항별 채점 기준은 다음과 같다.

예시답안 [문항 1] [30점]

(논제 1) (20점)

제시문 (ㄱ)에 의해 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$이고, 제시문 (ㄴ)에 의해 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이다. 따라서, 제시문 (ㄷ)의 조건은 $2\sin A \cos C = \sin B \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \dfrac{a}{2R} \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{b}{2R}$ 이므로 $a^2 = c^2$이다.	10점
a, b, c는 삼각형 ABC의 세 변의 길이이므로 $a = c$이고 따라서 삼각형 ABC는 $A = C$인 이등변 삼각형이다.	10점

(논제 2) (10점)

논제 1에 의해 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = a$이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S = \dfrac{1}{2}a^2 \sin B$ 이 $\dfrac{S}{\overline{\mathrm{AB}}^2} = \dfrac{1}{2}\sin B$이다.	5점
한편, $0 < A < \pi$이므로 $\dfrac{1}{2}\sin B$는 $B = \dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다. 따라서 구하고자 하는 $\dfrac{S}{\overline{\mathrm{AB}}^2}$의 최댓값 M은 $\dfrac{1}{2}$이다.	5점

예시답안 [문항 2] [30점]

(논제 1) (15점)

확률변수 X가 갖는 값이 1, 2이므로 $\mathrm{P}(X=1)=p$라고 하면 $\mathrm{E}(X)=1\times p+2\times(1-p)=2-p$이다.	5점
$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{4}$이므로 $\mathrm{P}(X=1)=p=\frac{1}{4}$이다.	5점
따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. X: 1, 2, 계 / $\mathrm{P}(X=x)$: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1	5점

X	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

(논제 2) (15점)

사건 $A\cap B$와 사건 $A\cap B^c$는 서로 배반사건이고 두 사건의 합사건은 사건 A이다. 따라서 확률의 덧셈정리에 의해 다음이 성립한다. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)$	5점
그런데 제시문 (ㄷ)의 첫 번째 조건에 의해 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))$이다.	5점
그런데 논제 1에서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$이다.	5점

예시답안 [문항 3] [40점]

(논제 1) (20점)

함수 $g(t)=\dfrac{1}{t}$이라고 하면 함수 $g(t)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $g(t)>0$이고 감소하므로, 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 의해서 $\dfrac{1}{n+1}=\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right)<\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\dfrac{1}{t}\,dt=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1\times\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right)=\dfrac{1}{n}$	15점
따라서 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{n}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e\,.$ 그러므로 제시문 (ㄷ)의 명제 A는 참이다.	5점

(논제 2) (20점)

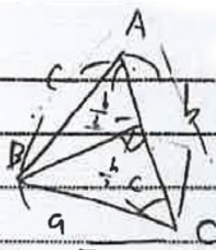
$f(x)=x^3-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n x^2+x-e$이라고 하자. (a) 논제 1로부터, $f\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e<0$이고 $f(e)=e^3-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n e^2+e-e=e^2\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)>0.$ 따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, e\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.	8점
(b) $x>e$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n x+1=x\left(3x-2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)+1>0$ 이므로 함수 $f(x)$는 구간 (e,∞)에서 증가한다. 따라서 $x\ge e$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(e)>0.$ 그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 (e,∞)에서 해를 갖지 않는다.	8점

논제 1과 (a), (b)에 의해서 제시문 (ㄹ)의 수 a_n은 다음을 만족한다. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n < e$. 한편, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.	4점

학생 답안 첨삭 예시 [문항 1]

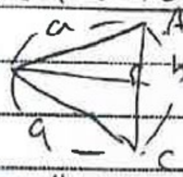
학생 답안 첨삭 예시는 참고용으로 예시답안을 토대로 논술전형을 준비해주시기 바랍니다.

논제1. 먼저 임의의 한 삼각형ABC를 그려보자.



제시문(가)에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$ 이므로 이 식들을,
제시문(다)의 조건인 $2\sin A\cos C=\sin B$에 대입하면
$2\cdot\frac{a}{2R}\cos C=\frac{b}{2R} \Leftrightarrow a\cos C=\frac{b}{2}$ 라는 식을 얻게 된다.
즉 $\overline{BC}=a$를 $\cos C$ 만큼 수직으로 내렸을 때의 길이가 $\frac{b}{2}$이므로 $\overline{AC}$의 길이를 수직이등분 시킨다. 또한 제시문(나)에 의하여 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 이므로.
앞서 얻은 식인 $\cos C=\frac{b}{2a}$를 대입하면 $c^2=a^2+b^2-b^2=a^2$ 즉, $c=a$라는 결과를 얻게 된다. 따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변 삼각형이다.

논제2. 논제1에서 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형임을 알게 되었으므로
그림을 다시 그려보면 다음과 같다.



다

10

따라서,
삼각형의 넓이 $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}|^2\sin B$ 이므로
$\frac{S}{|\overline{AB}|^2}=\frac{\sin B}{2}$ 이다. 따라서 삼각형의 내각의 합은 $180°$이므로
$0°<\angle B<180°$이고, 이 각도 내에서 $\frac{\sin B}{2}$가 최대가 되는 $\angle B$는 $90°$
이므로 그때의 M은 $\frac{1}{2}$이다.

Perfect!

30

학생 답안 첨삭 예시 [문항 2]

학생 답안 첨삭 예시는 참고용으로 예시답안을 토대로 논술전형을 준비해주시기 바랍니다.

논제1. X가 가질수 있는 값은 1 또는 2이고, $P(X=1)+P(X=2)=1$ 을 만족하므로 … ②

$P(X=1)=q$ 라 하자. $(0<q<1)$ ②에 의해 $P(X=2)=1-q$ 가 되고

제시문 (L)에 의해 $E(X)=\sum_{n=1}^{2} n\times P(X=n)=(1\times q)+(2\times(1-q))=q+2-2q=2-q$ 이고,

제시문 (ㄷ)에 의해 $E(X)=\frac{7}{4}$ 이므로 $2-q=\frac{7}{4} \Leftrightarrow q=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 제시문 (ㄷ)의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

이다.

$0\le q\le 1$

논제2. 제시문 (ㄷ)의 ii)에 의해 전체 공의 개수를 5k개 (k는 자연수)라 하면 붉은 공의 개수가 3k개 이므로 파란 공의 개수는 2k개이고,

논제1의 결과에 의해 1이 적힌 공의 개수와 2가 적힌 공의 개수의 비가 1:3 이므로 각각 l개, $3l$개 (l은 자연수)라 할수 있다.

먼저, 전체 공의 개수 $=2k+3k=l+3l$ 이므로 $5k=4l$ … ③ 이다.

다음, 제시문 (ㄷ)의 i)에 의해 $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$ 이므로

$P(A\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$ 이다. 즉 $(A\cap B)$를 만족하는 공의 개수는 $\frac{3}{20}\times 5k=\frac{3}{4}k$개 이고

③ 을 이용해 아래의 표로 나타내면

	붉은 공	파란공	총합
1이 적힌 공	$\frac{3}{4}k$개	$\frac{2}{4}k$개	$\frac{5}{4}k$개
2가 적힌 공	$\frac{9}{4}k$개	$\frac{6}{4}k$개	$\frac{15}{4}k$개
총합	$3k$개	$2k$개	$5k$개

이므로 제시문 (ㄷ)의 시행에서 2가 적힌 붉은 공을 꺼낼 확률은

$\left(\frac{9}{4}k\right)\div(5k)=\frac{9}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ 이다.

학생 답안 첨삭 예시 [문항 3]

학생 답안 첨삭 예시는 참고용으로 예시답안을 토대로 논술전형을 준비해주시기 바랍니다.

논제1. 1이상의 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 임을 보이면 된다.
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x \geq 1)$ 에서 $y>0$ 이고 $\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} > 0$
이므로 $y'>0$ $(x \geq 1)$ 이다. 따라서 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x \geq 1)$는 증가함수이고, $x=1$ 이면 $y=2$
이므로, $x \geq 1$ 이면 $\sqrt{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 이다. $(\because \sqrt{e} < 2)$

[illegible]

이제 $x \geq 1$ 이면 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 임을 보이자.
자연상수 e의 정의에 의해 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 이고 $x \geq 1$ 에서 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 는
증가함수이므로, $x \geq 1$ 에서 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 이다.

논제 2. $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = d_n$ 이라 하면 $d_n > 0$ 이고, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ 이다.

$$x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2 + x - e = 0$$
$$\Rightarrow x^3-(e-d_n)x^2+x-e=0$$
$$\Rightarrow x^3-ex^2+x-e=-d_n x^2$$

재미있는 풀이

$f(x)=x^3-ex^2+x-e$ 라 하면 주어진 방정식의 실근은 $y=f(x)$와 $y=-d_n x^2$
의 그래프의 교점의 x 좌표다. $f(x)=(x-e)(x^2+1)$ 이고, $f'(x)=3x^2-2ex+1$
으로부터 극점의 x좌표는 $x=\frac{e\pm\sqrt{e^2-3}}{3}$ 이다. $0<\sqrt{e^2-3}<e$ 이므로
두 극점의 x좌표는 0보다 크고 e보다 작다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프는
왼쪽 그림과 같고, 따라서 $y=-d_n x^2$ 과의
교점의 x좌표 중 가장 큰 값은 $n\to\infty$ 이면
e로 수렴한다 $(\because \lim_{n\to\infty} d_n = 0)$
$\sqrt{e}<e$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ 이다.