3. 자연과학·공학계열, 간호학과 논술전형 문제<단, 공간디자인·소비자학과, 의류학과, 아동학과 제외>

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 실수 a, b, c에 대하여 좌표평면 위의 방정식 $y = ax^2 + bx + 2$가 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y = -x^2 + 4x + c$이다.

(ㄴ) 좌표평면 위의 직선 l_1과 l_2는 다음 조건을 만족한다.

(1) l_1의 기울기는 음수이고 l_2의 기울기는 양수이다.

(2) l_1과 l_2는 모두 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = ax^2 + bx + 2$에 접한다.

(3) l_1과 l_2는 모두 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = -x^2 + 4x + c$에 접한다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = ax^2 + bx + 2$ 및 제시문 (ㄴ)의 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 a, b, c의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 도형의 이동, 미분 및 적분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 1. 도형의 대칭이동과 평행이동을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

논제 2. 이차함수에 접하는 접선과 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

문항해설

논제 1. 도형의 대칭이동과 평행이동을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.

논제 2. 이차함수에 접하는 접선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

평가기준

논제 1 [10점]

방정식 $y=ax^2+bx+2$가 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $-y=a(-x)^2+b(-x)+2$, 즉 $y=-ax^2+bx-2$이다.	5점
이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y=-a(x-1)^2+b(x-1)-2-6=-ax^2+(b+2a)x-a-b-8$이고, 방정식 $y=-x^2+4x+c$와 같으므로 $a=1, b=2, c=-11$이다.	5점

논제 2 [20점]

$f(x)=x^2+2x+2$라고 하면 $f'(x)=2x+2$ 곡선 $y=x^2+2x+2$위의 점 $(t, f(t))$에서 접선의 방정식은 $y=2(t+1)(x-t)+t^2+2t+2=2(t+1)x+2-t^2$	5점
또한 이 직선이 곡선 $y=-x^2+4x-11$에 접하면, 방정식 $2(t+1)x+2-t^2=-x^2+4x-11$, 즉 $x^2-2(t-1)x-t^2+13=0$은 중근을 가지고, $\frac{D}{4}=(t-1)^2-t^2-13=0$, 즉 $2t^2-2t-12=0$이다.	5점

$(t-3)(t+2)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=3$이므로 l_1의 방정식은 $y=-2x-2$, l_2의 방정식은 $y=8x-7$이다.	5점
l_1과 l_2의 교점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+2-(-2x-2))dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x^2+2x+2-(8x-7))dx$ $=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx$ $=[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x]_{-2}^{\frac{1}{2}}+[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{125}{12}$	5점

3. 자연과학·공학계열, 간호학과 논술전형 문제<단, 공간디자인·소비자학과, 의류학과, 아동학과 제외>

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 계수가 실수인 삼차함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$

(2) 실수 a에 대하여 $f(a) = 0$이고 $f''(a) = -12$이다.

(단, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.)

(3) 복소수 z에 대하여 $2z+9$, $-z-\frac{3}{4}i$는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 허근이다.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 2\}$인 다음 함수 $g(x)$의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다.

$$g(x) = f(x) + \frac{36}{f(x)}$$

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 2. 제시문 (ㄴ)의 M과 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 주어진 조건을 활용하여 함수의 계수를 구할 수 있는지 확인한다.

나) 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판별 할 수 있는지 확인한다.

다) 합성함수의 의미를 파악하고 있는지 확인한다.

문항해설

- 복소수의 성질과 근과 계수와의 관계를 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 도함수를 활용하여 주어진 구간에서의 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 합성함수의 의미를 알고 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

논제 1 [15점]

$z=\alpha+\beta i(\alpha, \beta$는 실수)라 하자. $2z+9, -z-\frac{3}{4}i$가 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 허근이므로 다음을 만족한다. $\overline{2z+9}=2\alpha+9-2\beta i=-\alpha-\left(\beta+\frac{3}{4}\right)i=-z-\frac{3}{4}i$ 따라서, $\alpha=-3,\ \beta=\frac{3}{4}$ 이고, 방정식 $f(x)=0$의 두 허근은 $3+\frac{3}{2}i,\ 3-\frac{3}{2}i$이다.	6점
방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라고 하면 함수 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다. $f(x)=b(x-a)\left(x^2-6x+\frac{45}{4}\right)$(단, $b\neq 0$) 제시문 (ㄱ)의 조건 (1)로 부터 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}b\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{17}{4}$ 이므로 $b=\frac{1}{1-2a}$ 이것과 제시문 (ㄱ)의 조건 (2)로 부터 $f''(a)=2b(2a-6)=-12$ 이므로 $a-3=-3(1-2a)$ 따라서 $a=0,\ b=1$이고, 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 다음과 같다. $f(x)=x\left(x^2-6x+\frac{45}{4}\right)=x^3-6x^2+\frac{45}{4}x$	9점

논제 2 [15점]

$f(x)=x^3-6x^2+\frac{45}{4}x$이면 $f'(x)=3x^2-12x+\frac{45}{4}=3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ 이 때, $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$이다. 닫힌구간 $[1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다. <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>$\cdots$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\cdots$</td><td>2</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{25}{4}$</td><td>↗</td><td>$\frac{27}{4}$</td><td>↘</td><td>$\frac{26}{4}$</td></tr></table>따라서 $1\le x\le 2$일 때, 함수 $f(x)$는 다음의 범위를 갖는다. $\frac{25}{4}\le f(x)\le\frac{27}{4}$	7점
함수 $h(t)=t+\frac{36}{t}$라고 하면, $g(x)=h(f(x))$이다. 따라서, 제시문 (ㄴ)의 최댓값 M은 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 함수 $h(t)$의 최댓값과 같고 최솟값 m은 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 함수 $h(t)$의 최솟값과 같다. $\frac{25}{4}\le t\le\frac{27}{4}$일 때, $h'(t)=1-\frac{36}{t^2}>0$이므로 함수 $h(t)$는 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 증가한다. 따라서 함수 $g(x)$의 최댓값 M과 최솟값 m은 다음과 같다. $M=h\left(\frac{27}{4}\right)=\frac{27}{4}+\frac{16}{3}=\frac{145}{12}$, $m=h\left(\frac{25}{4}\right)=\frac{25}{4}+\frac{144}{25}=\frac{1201}{100}$	8점

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 양의 정수이고 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$a_{n+2}=\begin{cases} 3(a_n+a_{n+1})+1 & (a_n+a_{n+1}\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n+a_{n+1}}{2} & (a_n+a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여 명제 p는 다음과 같다.

p : a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수이면

$n \le k+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=19$이고 $a_6=22$일 때, 가능한 모든 a_1을 원소로 갖는 집합을 A라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄴ)의 명제 p의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 수열의 뜻을 알고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

나) 수열의 귀납적 정의를 알고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

다) 명제의 뜻을 알고 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 이를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 평가한다.
- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 이를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

논제 1 [20점]

a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수라고 하자. a_n이 홀수이고 a_{n+1}이 짝수이면 $a_n + a_{n+1}$이 홀수이므로 $a_{n+2} = 3(a_n + a_{n+1}) + 1$은 짝수이다. 그런데 a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수이므로 a_{k+1}은 홀수이다.	6점
또한, a_n이 짝수이고 a_{n+1}이 홀수이면 $a_n + a_{n+1}$이 홀수이므로 $a_{n+2} = 3(a_n + a_{n+1}) + 1$은 짝수이다. 그런데 a_k와 a_{k+1}이 모두 홀수이므로 $k-1$이 자연수일 때 a_{k-1}도 홀수이다.	6점
그러면 $k-2$가 자연수일 때 a_{k-1}과 a_k가 모두 홀수이므로 a_{k-2}도 홀수이다. 이와 같이 계속하면 $a_{k-3}, \cdots, a_1$이 모두 홀수임을 얻는다.	6점
따라서 $n \leq k+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수이다. 그러므로 명제 p는 참이다.	2점

논제 2 [20점]

a_5가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각하자. i) a_5가 홀수인 경우 : 명제 p가 참이고 $a_3=19$이므로 명제 p에 의해 $a_1, a_2, \cdots, a_5$는 모두 홀수이다. 따라서 $(a_4+a_5)/2=a_6=22$이고 $a_5=(a_3+a_4)/2=(19+a_4)/2$이다. 그러므로 $a_4+a_5=44$이고 $2a_5=19+a_4$이다. 따라서 $a_5=21$이고 $a_4=23$이다. 그런데 $a_2+a_3=2a_4$이므로 $a_2=2a_4-a_3=46-19=27$이고, $a_1+a_2=2a_3$이므로 $a_1=2a_3-a_2=38-27=11$이다. 따라서 수열 $11, 27, 19, 23, 21, 22, \cdots$이 주어진 조건을 만족하고 $a_1=11$이다.	**9점**
ii) a_5가 짝수인 경우 : 이 경우 a_4가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 살펴보자. 1) a_4가 홀수인 경우 : $a_5=(a_3+a_4)/2$이고 $a_6=3(a_4+a_5)+1$이 성립한다. 따라서 $2a_5=19+a_4$, $a_4+a_5=7$이다. 그러므로 $3a_5=26$이다. 이를 만족하는 양의 정수 a_5는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1은 없다. 2) a_4가 짝수인 경우 : $a_5=3(a_3+a_4)+1$이고 $a_6=(a_4+a_5)/2$을 만족한다. 따라서 $a_5=3a_4+58$, $a_4+a_5=44$이다. 그러므로 $4a_4+14=0$이다. 이를 만족하는 양의 정수 a_4는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1은 없다.	**9점**
따라서 $A=\{11\}$이다.	**2점**