4. 의예과 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 수아와 은우는 게임을 연속으로 2번 먼저 이기는 사람이 승자가 되는 시합을 한다.

(ㄴ) 제시문(ㄱ)의 시합에서 게임을 이길 확률은 각각 다음과 같다.

	첫 번째 게임	수아가 이긴 다음 게임	은우가 이긴 다음 게임
수아가 이길 확률	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$
은우가 이길 확률	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 시합에 대하여 확률 p와 q는 다음과 같다.

> p : 수아가 승자가 될 확률
>
> q : 2020번째 게임에서 시합이 끝났을 때, 수아가 승자가 될 확률

논제. 제시문 (ㄷ)의 확률 p와 q의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 확률, 조건부확률 및 수열과 급수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.
확률의 합의 법칙과 무한급수를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
또 조건부확률을 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

문항해설

- 확률의 계산과 무한급수를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

시합이 짝수번의 게임에서 끝날 경우와 홀수번의 경우에서 끝날 때로 나누어 생각한다. (1) $2n$번에 게임에서 수아가 승리할 경우는 (○는 수아 승리, ×는 은우 승리) ○×○×○⋯×○○(×○가 $n-1$번) 이므로 그 확률은 $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{3}{5}=\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1},\ (n\geq 1)$	40점
(2) $2n+1$번에 게임에서 수아가 승리할 경우는 ×○×○⋯×○○(×○가 n번)이므로 그 확률은 $\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)^{n}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}\quad(n\geq 1)$	40점
따라서 구하는 확률 p는 $p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}=\frac{9}{25}\frac{1}{1-\frac{2}{15}}+\frac{3}{5}\frac{\frac{2}{15}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{33}{65}$	10점
또 2020번의 게임에서 시합이 끝났을 때 수아가 승리할 확률은 위 (1)에서 $\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{1009}$ 이고,	20점

은우가 승리할 경우는 ×○×○···×○××(×○가 1009번) 이므로 그 확률은 $(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3})^{1009}\frac{2}{5}\frac{2}{3} = \frac{4}{15}(\frac{2}{15})^{1009}$	40점
따라서 구하는 조건부확률 q는 $q = \dfrac{\frac{9}{25}(\frac{2}{15})^{1009}}{\frac{9}{25}(\frac{2}{15})^{1009}+\frac{4}{15}(\frac{2}{15})^{1009}} = \frac{27}{47}$ 이다.	20점

4. 의예과 논술전형 문제

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{3x^{3n+2} + 3x^{2n} + x + 5}{x^{3n} + 1} \qquad (x \neq -1)$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = \sqrt{a(x+b)} + 3$은 한 점에서 공통인 접선을 가진다. (단, $a > 0$, $b > 1$)

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 제시문 (ㄴ)을 만족하는 a, b에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = \sqrt{2b(x+a)} + \frac{5}{2}$의 교점의 개수를 m이라 하자.

논제. 제시문 (ㄷ)의 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 수열의 극한을 이해하고 극한으로 정의된 함수를 이해하는지를 확인한다.

나) 함수의 연속을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

다) 접선의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.

문항해설

- 함수의 연속성을 이해하고, 이를 활용해 접선의 개념을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

평가기준

극한으로 정의된 함수 $f(x)$는 $|x|<1$, $|x|>1$, $x=1$에서 각각 다음과 같다.

① $|x|<1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{3n+2}+3x^{2n}+x+5}{x^{3n}+1}=x+5$$

② $|x|>1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{3n+2}+3x^{2n}+x+5}{x^{3n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2+\frac{3}{x^n}+\frac{1}{x^{3n-1}}+\frac{5}{x^{3n}}}{1+\frac{1}{x^{3n}}}=3x^2$$

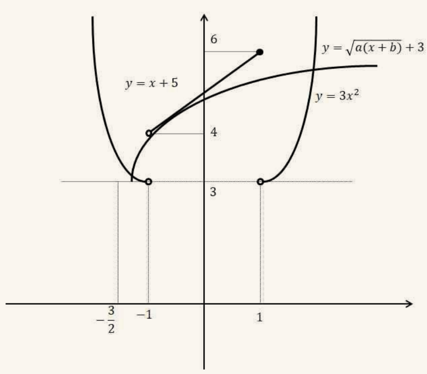
③ $x=1$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3(1)^{3n+1}+3(1)^{2n}+1+5}{(1)^{3n}+1}=6$$

50점

한편, 양수 a와 1보다 큰 실수 b에 대하여 제시문 (ㄴ)을 만족하기 위해서는 곡선

$y=\sqrt{a(x+b)}+3$과 곡선 $y=f(x)$가 아래의 그림과 같이 $-1<x\le 1$에서 접해야 한다.



즉, 접점을 $(t, t+5)$라 하면 실수 t는 다음을 만족한다.

$$\frac{a}{2\sqrt{a(t+b)}}=1,\quad t+5=\sqrt{a(t+b)}+3$$

60점

이를 t에 관해서 풀면, $a=8-4b$임을 알고, $-1<t\le 1$와 $a>0$, $b>1$에 의해

제시문 (ㄴ)을 만족하는 a, b의 관계식은 다음과 같다.

$a=8-4b\ \left(1<b<\dfrac{3}{2}\right)$

제시문 (ㄷ)의 m값을 구하기 위해 $x=-1, 1$에서의 $y=\sqrt{2b(x+a)}+\dfrac{5}{2}$의 함숫값을 살펴보자.

앞서 구한 a와 b의 관계식 $a=8-4b\ \left(1<b<\dfrac{3}{2}\right)$을 이용하면 $x=-1,\ 1$에서의

$y=\sqrt{2b(x+a)}+\dfrac{5}{2}$의 함숫값인 $\sqrt{2b(-1+a)}+\dfrac{5}{2}$, $\sqrt{2b(1+a)}+\dfrac{5}{2}$에 대해

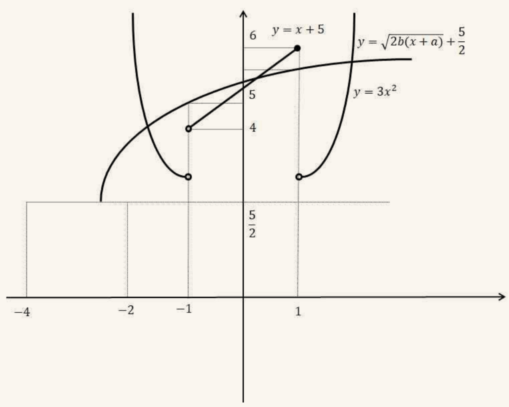
다음의 부등식을 얻는다.

$$4<\frac{5}{2}+\sqrt{3}<\sqrt{2b(-1+a)}+\frac{5}{2}=\sqrt{2b(7-4b)}+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}+\sqrt{6}<5$$

$$5<\frac{5}{2}+3<\sqrt{2b(1+a)}+\frac{5}{2}=\sqrt{2b(9-4b)}+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}+\frac{9}{2\sqrt{2}}<6$$

함수 $y=\sqrt{2b(x+a)}+\dfrac{5}{2}$는 $x\ge -a$에서 연속이고 $2<a<4$이므로

위 두 부등식에 의해 $m=3$이다. (아래 그림 참고)



60점

4. 의예과 논술전형 문제

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 20보다 큰 자연수 n에 대하여 2^n+61는 다음을 만족한다. (단, A, m_1, k_1는 자연수)

$$2^n+61=(2^n-2)(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 $1+\frac{A}{m_1}$은 다음을 만족한다. (단, B, m_2, k_2은 자연수)

$$1+\frac{A}{m_1}=(1+\frac{B}{m_2})(1+\frac{1}{2^{n-1}-k_2})$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 $1+\frac{B}{m_2}$은 다음을 만족한다. (단, C, m_3, k_3는 자연수)

$$1+\frac{B}{m_2}=(1+\frac{C}{m_3})(1+\frac{1}{2^{n-2}+k_3})$$

논제. 제시문 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)을 모두 만족시키는 순서쌍(k_1, k_2, k_3)을 1개 구하고 그 근거를 논술하시오.

(단, $0<k_2<10<k_3<50<k_1<100$) (180점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 다항식과 지수로 구성된 식의 사칙연산을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.
식을 곱셈과 나눗셈을 통하여 원하는 형태로 나타낼 수 있는지 평가하는 문제이다.

문항해설

- 다항식과 지수로 구성된 식을 사칙연산을 통하여 주어진 형태로 변형하여 표현할 수 있는지 평가한다.

평가기준

$2^n+61=(2^n-2)(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$ 에서 $1+\frac{63}{2^n-2}=(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$ 양변에 2^n+k_1 을 곱하면 $(2^n+k_1)(1+\frac{63}{2^n-2})=(1+\frac{A}{m_1})(2^n+k_1+1)$	30점
(좌변)= $\frac{2^n+k_1}{2^n-2}(2^n+61)=(1+\frac{k_1+2}{2^n-2})(2^n+61)$ 이 되고 $k_1=60$이면 $\frac{A}{m_1}=\frac{31}{2^{n-1}-1}$이 되어 우변과 같아지고 주어진 조건을 만족한다.	30점
또한, $1+\frac{A}{m_1}=1+\frac{31}{2^{n-1}-1}=(1+\frac{B}{m_2})(1+\frac{1}{2^{n-1}-k_2})$ 에서 양변에 $2^{n-1}-k_2$를 곱하면 $(2^{n-1}-k_2)(1+\frac{31}{2^{n-1}-1})=(1+\frac{B}{m_2})(2^{n-1}-k_2+1)$ 이 되고	30점
이 식을 전개하여 정리하면 $(2^{n-1}-k_2)\frac{31}{2^{n-1}-1}=1+\frac{B(2^{n-1}-k_2+1)}{m_2}$ 이 된다. 따라서 $\frac{B}{m_2}=\frac{1}{2^{n-1}-k_2+1}(\frac{31(2^{n-1}-k_2)}{2^{n-1}-1}-1)$ 를 만족하고, $k_2=1$이면 $\frac{B}{m_2}=\frac{30}{2^{n-1}}=\frac{15}{2^{n-2}}$가 되어 주어진 조건을 만족한다.	30점

$1+\frac{B}{m_2}=1+\frac{15}{2^{n-2}}=(1+\frac{C}{m_3})(1+\frac{1}{2^{n-2}+k_3})$ 에서 양변에 $2^{n-2}+k_3$을 곱하면 $(2^{n-2}+k_3)(1+\frac{15}{2^{n-2}})=(1+\frac{C}{m_3})(2^{n-2}+k_3+1)$ 이 되고	30점
(좌변)= $\frac{2^{n-2}+k_3}{2^{n-2}}(2^{n-2}+15)=(1+\frac{k_3}{2^{n-2}})(2^{n-2}+15)$ 이므로 $k_3=14$이면 $\frac{C}{m_3}=\frac{14}{2^{n-2}}=\frac{7}{2^{n-3}}$이 되어 주어진 조건을 만족한다. 따라서 $k_1=60, k_2=1, k_3=14$이다.	30점

4. 의예과 논술전형 문제

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = 2\int_0^x \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta + 1$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{1}{4^n} f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S는 다음과 같다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(ㄹ) **[사인함수의 덧셈정리]**

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2) $\alpha = \beta$일 때, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

논제. 제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (180점)

[문항 4] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 정적분의 치환적분법을 활용할 수 있는지를 확인한다.

나) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 분리할 수 있는지를 확인한다.

다) 삼각함수의 극한을 활용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 삼각함수의 성질과 정적분의 치환적분법을 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수열의 부분합을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 삼각함수의 극한을 활용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

치환적분법에 의해서 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 다음과 같다. $$f(x)=2\int_0^x \tan\theta(\tan\theta)'\,d\theta+1=\left[\tan^2\theta\right]_0^x+1=\tan^2x+1=\frac{1}{\cos^2x}$$	30점
따라서 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다. $$a_n=\frac{1}{4^n\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$	10점

사인함수의 덧셈정리에 의해서 $$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)\times\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}$$ $$=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}+\frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}+a_1$$ $$\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}=\frac{1}{4^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+\frac{1}{4^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}$$ $$=\frac{1}{4^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+a_2$$ $$\vdots$$ $$\frac{1}{4^{n-2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-2+2}}\right)}=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n-1}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}$$ $$=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+a_{n-1}$$ $$\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}=\frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$ $$=\frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+a_n$$	60점
모두 더하면 $$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$	20점
한편, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{16}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right)^2=\frac{16}{\pi^2}$$	40점
따라서 제시문 (ㄷ)의 S 값은 다음과 같다. $$S=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=2-\frac{16}{\pi^2}$$	20점