III

2020학년도 가톨릭대학교 착한 모의논술전형

자연과학·공학계열 및 간호(자연)

자연과학·공학계열 및 간호(자연)

※ 모의논술전형 문항은 출제경향의 참고용으로 실제 논술전형과 난이도, 출제범위 등에서 다를 수 있습니다. 반드시, 전년도 논술전형 문항을 참고하여 2020학년도 가톨릭대학교 논술전형을 준비해주시기 바랍니다. 논술전형 가이드북은 본교 입학 홈페이지를 통해 다운로드 받을 수 있습니다.

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

ㄱ 붉은 공 4개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 그 공의 색을 확인한다. 꺼낸 공과 같은 색의 공 2개와 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣고 그 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼낸다.

ㄴ 제시문 (ㄱ)의 시행에서 첫 번째 꺼낸 공이 붉은 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 붉은 공인 사건을 B라고 하자.

ㄷ [두 사건의 독립일 조건] 두 사건 A, B가 서로 독립일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
(단, $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$)

논제 1. (15점) 제시문 (ㄴ)의 사건 A와 사건 B의 확률이 같음을 보이고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄴ)의 사건 A와 사건 B가 서로 독립인지 아닌지 말하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㅁ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

ㄱ 자연수 n과 실수 x에 대하여 다음 식이 성립한다. (단, $x \neq 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(x^n - 1)}{x-1}$$

ㄴ [함수의 몫의 미분법] 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ $(h(x) \neq 0)$가 미분가능할 때

$$y = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ 이면 } y' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

ㄷ 자연수 n과 실수 x에 대하여 다음이 성립한다. (단, $x \neq 0, 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

ㄹ 정수 k에 대하여, 모든 계수가 정수인 n차 다항식 $f(x)$를 $(x-k)$로 나누면 몫은 모든 계수가 정수인 $(n-1)$차 다항식이고 나머지는 $f(k)$이다.

ㅁ 자연수 m에 대하여 $6m^5 + 5m^4 + 4m^3 + 3m^2 + 2m + 1$이 $(m+2)$의 배수가 되는 모든 m의 집합을 A라고 하자.

논제 1. (10점) 제시문 (ㄱ), (ㄴ)을 이용하여 제시문 (ㄷ)이 옳음을 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㅁ)의 집합 A에 대하여 43이 집합 A의 원소임을 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

ㄱ 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=l(x)$라고 하자. 이 때 다항식 $f(x)-l(x)$는 $(x-a)^2$으로 나누어 떨어진다.

ㄴ [변곡점] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

ㄷ 일차함수 $g(x)$와 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=h(x)$의 교점의 개수는 1이고, 교점에서 접한다.

ㄹ 제시문 (ㄷ)의 함수 $g(x)$와 $h(x)$에 대하여 곡선 $y=h(x)$의 변곡점을 $\mathrm{P}(a,\ h(a))$라 하고 두 곡선 $y=h(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=a+2$로 둘러싸인 도형을 S라 하자.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄱ)의 명제가 참임을 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄹ)의 도형 S의 넓이를 구하고 그 근거를 논술하시오.

출제원칙

1. 출제 방침

가. 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

나. 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2. 출제 유형

가. 지문 제시형 문제를 출제한다.

나. 제시문은 고교 교과서("수학 I", "수학 II", "미적분 I", "미적분 II", "확률과 통계", "기하와 벡터")를 참조하여 구성한다.

다. 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

라. 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

가. [문항 1] 경우의 수와 확률의 개념을 알고 이를 구할 수 있는 지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 곱사건의 확률을 구할 수 있는 능력과 사건의 독립과 종속을 구별하고, 그 이유를 설명할 수 있음을 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 기본적인 미분을 계산할 수 있고, 나머지 정리를 이용하여 약수와 배수의 관계를 파악할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 접선의 의미를 알고 이를 방정식에 응용할 수 있는지, 다항함수의 적분을 이해하고 이를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

나. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1. 기본 사항

가. 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산한다.**

나. 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2. 세부 사항

가. 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

나. 각 문항별 채점 기준은 다음 예시답안과 같다.

예시답안
[문항 1] (30점)

(논제 1) (15점)

내용	배점
붉은 공을 R, 파란 공을 B이라고 할 때 각 시행에서 붉은 공 또는 파란 공이 나올 확률은 다음 표와 같다.	10점

첫 번째 꺼낸 공의 색	두 번째 꺼낸 공의 색	확률
R	R	$\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}$
B	R	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{8}$

따라서 사건 A와 사건 B가 나올 확률은 각각

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{8}=\frac{2}{3}$ 이다.

즉 사건 A와 사건 B가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$로 같다.

5점

(논제 2) (15점)

사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}=\frac{1}{2}$ 이고

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ 이다.

10점

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$와 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 다르므로 사건 A와 사건 B는 서로 독립이 아니다.

5점

예시답안
[문항 2] (30점)

(논제 1) (10점)

제시문 (ㄱ)에 의하여 $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left\{\sum_{k=1}^{n} x^k\right\}' = \left\{\dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}\right\}'$이다.	5점
$y = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$ 이라하고 제시문 (ㄴ)을 이용하여 미분을 계산하면 $y' = \dfrac{\{(n+1)x^n-1\}(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ 이므로 제시문 (ㄷ)이 옳음을 알 수 있다.	5점

(논제 2) (20점)

다항식 $f(x) = 6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$를 $x+2$로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 하자. 즉, $f(x) = (x+2)Q(x)+R$이다. 제시문 (ㄷ)과 제시문 (ㄹ)을 이용하면 $R = f(-2) = \dfrac{6\times(-2)^7-7\times(-2)^6+1}{9} = -\dfrac{1215}{9} = -135$임을 얻는다.	5점
제시문 (ㄹ)에 의하여 $Q(x)$는 모든 계수가 정수인 4차 다항식이므로 $Q(m)$은 정수이다. 따라서, $f(m)$이 $m+2$의 배수가 되기 위해서는 $m+2$는 135의 약수가 되어야 한다.	5점
$m+2$는 2보다 크므로 1을 제외한 135의 약수가 $m+2$로 가능한 값들이다. $135 = 45\times3$ 이므로 45는 135의 약수이다.(135가 45의 배수임을 확인하면 된다.)	5점
따라서 43은 집합 A의 원소이다.	5점

예시답안
[문항 3] (40점)

(논제 1) (20점)

$p(x)=f(x)-l(x)$라고 두자. $l(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$이므로 $p(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$이다.	5점
따라서 $p(a)=0$이고, $p'(x)=f'(x)-f'(a)$이므로 $p'(a)=0$이다.	5점
$p(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 $k_1(x-a)+k_2$라고 하면 $p(x)=(x-a)^2q(x)+k_1(x-a)+k_2$이므로	5점
$p(a)=k_2$이고 $p'(a)=k_1$이다. 따라서 $k_1=k_2=0$이고, $p(x)=(x-a)^2q(x)$이다. 즉, $f(x)-l(x)$는 $(x-a)^2$으로 나누어떨어진다. 따라서 제시문 (ㄱ)의 명제가 참이다.	5점

(논제 2) (20점)

직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=h(x)$의 교점을 $(b,\ h(b))$라 하자. 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(b,\ h(b))$에서의 접선이므로 제시문 (ㄱ)에 의해 $h(x)-g(x)=2(x-b)^2(x-c)$로 쓸 수 있다. 그런데 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=h(x)$의 교점의 개수가 1이므로 $b=c$, 즉, $h(x)-g(x)=2(x-b)^3$이다.	10점
따라서 $h''(x)=12(x-b)$이고 곡선 $y=h(x)$의 변곡점은 $(b,\ h(b))$이다. 따라서 $a=b$이고 도형 S의 넓이는 $\int_a^{a+2} \lvert h(x)-g(x)\rvert dx=\int_a^{a+2} 2(x-a)^3 dx=8$이다.	10점

학생 답안 첨삭 예시
[문항 1]

【문항 1】 30

논제 1

제시문 (ㄴ)의 사건 A가 일어날 확률과 사건 B가 일어날 확률을 구해보자.

사건 A) 첫번째 꺼낸 공이 붉은 색일 확률은

$\dfrac{\text{붉은 공의 개수}}{\text{주머니 안의 모든 공}}$ 로 나타낼 수 있다.

$\therefore P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

사건 B) 두번째 꺼낸 공이 붉은색인 사건 B는 첫번째 꺼낸 공이 붉은 색 이였거나 파란색 일 두가지 경우로 나뉜다.

i) 첫번째 꺼낸 공이 붉은색이고 두번째 꺼낸 공도 붉은 색일 확률

첫번째에 붉은 공을 뽑으면 두번째 시행때 붉은공이 두개가 추가되므로 8개의 공중 붉은색 공은 6개이다.

$\therefore \frac{4}{6} \times \frac{6}{8} = \frac{24}{48}$

ii) 첫번째 꺼낸 공이 파란색이고 두번째 꺼낸 공이 붉은색일 확률

첫번째에 파란공을 뽑으면 파란공이 두개 추가되므로 두번째 시행때는 전체공 8개중 붉은공은 4개이다.

$\therefore \frac{2}{6} \times \frac{4}{8} = \frac{8}{48}$

$P(A) = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{24}{48} + \frac{8}{48}$ (합의 법칙에 의하여)

$= \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$

$\therefore P(A) = P(B)$ ✓

논제 2

독립일 필요충분 조건은 제시문 (ㄷ)과 같다.

이때 $P(A \cap B)$는 첫번째 시행때 붉은 공을 뽑고 두번째 시행때 붉은 공을 뽑은 확률이다.

$\therefore P(A \cap B)$는 논제 1의 사건 B의 케이스 i)와 같다.

$P(A \cap B) = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{2}{3}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{9}$

$\frac{1}{2} \neq \frac{4}{9}$

$\therefore$ 독립일 필요충분조건인 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$를 만족시키지 않는다.

P(A)와 P(B)는 독립이 아니다. ✓

아주 좋은 답안입니다.

설명도 좋고...

가톨릭대학교

2020학년도 가톨릭대학교 모의논술 전형(자연과학·공학계열, 간호자연)

[문항 2]

2-1) 제시문 (ㄱ)에서 $x+x^2+x^3\cdots x^n=\dfrac{x(x^n-1)}{x-1}=y$라 하자.

y를 (ㄴ)을 이용하여 미분해주면, $y'=1+2x+3x^2+\cdots nx^{n-1}=\dfrac{(n+1)x^n-1)(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x+1}{(x-1)^2}-\dfrac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$

10 $\quad=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

따라서, 제시문 (ㄷ)에서 $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=1+2x+3x^2\cdots nx^{n-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$이 성립한다. //

2-2) $6m^5+5m^4+4m^3+3m^2+2m+1=f(m)$이라 하자.

(ㄷ)에 의하여, $f(m)=\sum_{k=1}^{6} km^{k-1}=\dfrac{6m^7-7m^6+1}{(m-1)^2}$.

(ㄹ)에 의하여, $f(m)$를 $(m+2)$로 나누면, 몫은 모든 계수가 정수인 4차 다항식이고 나머지는 $f(-2)$이다.

$f(m)\Rightarrow 6m^5+5m^4+4m^3+3m^2+2m+1=(m+2)(6m^4-7m^3+18m^2-33m+68)-135$

$=(m+2)(6m^4-7m^3+18m^2-33m+68)-5\cdot 3^3$

$m+2$가 135의 약수가 되면, 성립한다.

그런데, $m=43$일 때, $m+2=45$이므로 이것이 135의 약수가 되므로

$m=43$일 때는 집합 A의 원소가 된다.

20

$\boxed{30}$

학생 답안 첨삭 예시
[문항 3]

【문항 3】

논제 1 $l(x)$의 방정식은 다음과 같다.

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 따라서 함수 $f(x) - l(x)$를 $p(x)$라 할때 $p(x)$의 방정식은

$y = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ … ① 이다. $p(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$

①에 $x=a$를 대입하면 $y = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$ 이므로

다항함수 $h(x)$ (∵ $h(x)$는 두 다항함수의 차로 정의됨)는 $(x-a)$를 인수로 가진다. ②

$h(x)$가 어떤 함수를 의미하는지 명확히 쓰세요

$h(x)$를 미분하면, $h'(x) = f'(x) - f'(a)$ 이다. 양변에 $x=a$를 대입하면 $h'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$이므로

$h'(x)$또한 ~~x~~ $(x-a)$를 인수로 가진다. ③

② 에서 $h(x) = (x-a)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이다. 양변을 x에 대해 미분하면

$h'(x) = Q(x) + (x-a)Q'(x)$ 이고 ③에서 $Q(a) = 0$ 임을 알수 있다. 즉, $Q(x)$ 또한

$(x-a)$ 를 인수로 가진다. $\dfrac{Q(x)}{(x-a)} = R(x)$라 할 때 $R(x)$는 x에 대한 다항식 이므로

$h(x) = (x-a)^2 R(x)$ 이다. 따라서 $h(x) = f(x) - l(x)$는 $(x-a)^2$로 나누어 떨어진다.

$Q(x) = (x-a)R(x)$ 라고 표현하는 것이 좋겠어요.

20

논제 2 $\{h(x) - g(x)\}$를 $k(x)$라 할때 함수 $y = k(x)$는 최고차 항의 계수가 2인 삼차 함수이다. 또한 제시문(다)에서 $k(x) = 0$은 단 한개의 근을 가지며 ① $y = g(x)$는 그 중에서의 $y = h(x)$의 접선이므로

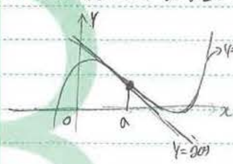
제시문(가)에 의해 $y = g(x)$와 $y = h(x)$의 교점의 x좌표를 b라 할때

$k(x) = 2(x-b)^2(x-c)$ (c는 실수)이다. ①에 의해 $b = c$이므로

$k(x) = 2(x-b)^3$ 이다.

$k(x) = h(x) - g(x)$ 이므로 $k''(x) = h''(x) = 12(x-b)$ 이다. (∵ $g(x)$는 일차다항식)

제시문. (나), 제시문(라)에서 $h''(x) = 0$의 근, 즉 $y = h(x)$의 변곡점의 x좌표는 $x = a$가 유일하므로 $a = b$임을 알수 있다.



(다시말해 그림과 같이 $y = g(x)$는 $y = h(x)$의 변곡점에서 그은 접선임을 알수 있다.)

$h(x) - g(x) = 2(x-a)^3$ 로부터 알 수 있음

$x > a$에서 $h(x) > g(x)$ 이므로 (이는 $k(x)$의 근이 1개라는 사실과 사잇값 정리로 증명가능함)

S의 넓이 $= \int_a^{a+2} \{h(x) - g(x)\}dx = \int_a^{a+2} k(x)dx = \int_a^{a+2} 2(x-a)^3 dx$ 이다. ②

② $= \left[\frac{1}{2}(x-a)^4\right]_a^{a+2} = 8$ 이므로

S의 넓이는 8 이다

20