3. 자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 초점 $\mathrm{F}\,(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$과 타원 위의 점 A에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}'}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}'}$의 최댓값을 M 최솟값을 m이라 하자. 단, c는 양수이다.

(ㄴ) 초점이 제시문 (ㄱ)의 점 F이고 꼭짓점이 $\mathrm{B}\,(4, 0)$인 포물선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 단, 점 C의 y좌표는 양수이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 점 C에서 제시문 (ㄱ)의 타원에 그은 접선 ℓ이 타원과 만나는 점을 D라 하자. 단, 직선 ℓ의 기울기는 양수이다.

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 c, M, m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 2. 제시문 (ㄴ), (ㄷ)의 점 B, C, D에 대하여 삼각형 BCD의 넓이를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

본 문제는 이차곡선과 평면벡터를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 1. 이차곡선 중 하나인 타원과 평면벡터의 내적을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

논제 2. 타원과 초점을 공유하는 포물선을 구하고 매개변수의 미분을 활용한 접선을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2) 문항해설

논제 1. 주어진 타원의 초점을 구하고 평면벡터의 내적을 활용하여 내적의 최대, 최소를 구할 수 있는지를 평가한다.

논제 2. 타원과 초점을 공유하는 포물선을 구하고 이와 점과 직선 사이의 거리를 활용해 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

논제 1 [15점]

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(3,0)$, $\mathrm{F}'(-3,0)$이다.	5점
타원 위의 점 A를 $\mathrm{A}=(x,y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AF}'}$는 각각 $(3-x,\ -y)$, $(-3-x,\ -y)$이고, 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}'}=(3-x,\ -y)\cdot(-3-x,\ -y)=x^2+y^2-9$이다.	5점
$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}'}=x^2+y^2-9=k$로 두면 점 A는 중심이 원점이고 반지름이 $\sqrt{k+9}$인 원위를 움직인다. 이 때, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}'}$는 $\sqrt{k+9}=\sqrt{7}$일 때 최솟값, $\sqrt{k+9}=4$일때 최댓값을 갖는다. 따라서, $M=7$, $m=-2$이다.	5점

논제 2 [15점]

점 $\mathrm{B}(4,0)$이 꼭짓점이고 $\mathrm{F}(3,0)$이 초점인 포물선은 원점이 꼭짓점이고 $(-1,0)$이 초점인 포물선 $y^2=-4x$를 x축으로 4만큼 평행이동시킨 $y^2=-4(x-4)$이다.	5점
이 포물선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $y^2=-4(0-4)$에서 $y=\pm4$이고, 이 중 y좌표가 양수인 점 C는 $(0,4)$이다. 한편, 점 C에서 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$에 그은 접선이 타원과 만나는 점을 $\mathrm{D}(x_1,y_1)$이라 하면, 점 D는 다음 두 식을 만족한다. $\dfrac{0x_1}{16}+\dfrac{4y_1}{7}=1,\ \dfrac{x_1^2}{16}+\dfrac{y_1^2}{7}=1$ 이 두 식을 만족하는 점은 $(x_1,y_1)=(-3,\ \dfrac{7}{4}),\ (3,\ \dfrac{7}{4})$이고, 이 중 접선의 기울기가 양수인 점 D는 $(-3,\ \dfrac{7}{4})$이다.	5점
점 B와 D를 지나는 직선은 $y=-\dfrac{1}{4}(x-4)$이고 이 직선과 y축이 만나는 점 $(0,1)$을 E라 두면, 삼각형 BCD의 넓이는 삼각형 BCE의 넓이와 삼각형 CDE의 넓이의 합이다. 따라서, 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}(3\times3+3\times4)=\dfrac{21}{2}$이다.	5점

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=2\ln x$$
$$g(x)=x+\frac{3}{x}+a$$
$$h(x)=2x+\frac{b}{x}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 교점이 존재한다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$, $h(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$를 y축 방향으로 평행이동하여 곡선 $y=h(x)$와의 교점이 두 개 이상 존재하도록 할 수 있다.

(ㄹ) **(로그함수의 극한)** $x\to 0+$일 때, $y=\ln x$의 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty$$

논제 1. 제시문 (ㄴ)을 만족하는 상수 a의 값의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)을 만족하는 상수 b의 값의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

본 문제는 주어진 상황에서 로그함수와 유리함수의 극한과 미분법을 이해하고, 이를 극대, 극소 및 방정식에 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 1. 주어진 상황에서 로그함수와 유리함수의 극한과 미분법을 활용하여 극댓값을 구하고 이를 방정식에 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 2. 주어진 상황에서 로그함수와 유리함수의 미분법을 활용하여 극대, 극소의 존재 조건을 유도할 수 있는지 평가하고자 한다.

2) 문항해설

논제 1. 주어진 상황에서 방정식을 유도하고, 도함수와 극값을 구하여 이를 방정식의 해의 존재를 규명하는 데 활용할 수 있는지를 평가한다.

논제 2. 주어진 상황에서 방정식을 유도하여 도함수를 구하고, 극값의 존재 여부를 활용하여 방정식의 해의 존재를 규명할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

논제 1 [15점]

$k(x)=f(x)-g(x)=2\ln x-x-\dfrac{3}{x}-a$라고 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 교점이 존재하기 위해서는 $f(x)=2\ln x$의 정의역이 $x>0$이므로, 방정식 $k(x)=0$이 양의 실근을 가져야 한다.	3점
$k'(x)=\dfrac{2}{x}-1+\dfrac{3}{x^2}=-\dfrac{x^2-2x-3}{x^2}=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{x^2}$ 이므로 $k'(x)=0$을 만족하는 양의 실근은 $x=3$이다.	3점
양수 구간에서 함수의 증감을 조사하면 다음과 같다. <table><tr><td>x</td><td>$0<x<3$</td><td>3</td><td>$x>3$</td></tr><tr><td>$k'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$k(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$2\ln 3-4-a$</td><td>$\searrow$</td></tr></table> 즉 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.	4점
제시문 (ㄹ)에 의하여 $\lim\limits_{x\to0+}k(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(2\ln x-x-\dfrac{3}{x}-a\right)=-\infty$이므로, 극대값이 0보다 크거나 같으면 양의 실근을 가진다. $2\ln 3-4-a\ge0$이어야 하므로, a값의 범위는 $a\le 2\ln 3-4$이다.	5점

논제 2 [15점]

$l(x)=f(x)-h(x)=2\ln x-2x-\dfrac{b}{x}$라고 하자. 곡선 $y=l(x)$를 y축으로 평행이동 하여 x축과 두 개 이상의 교점을 가질 수 있게 되는 경우에 곡선 $y=f(x)$를 y축으로 평행이동 하여 곡선 $y=h(x)$와 두 개 이상의 교점을 가질 수 있게 된다. 또한 정의역이 $x>0$이므로 $y=l(x)$가 $x>0$에서 극값을 가지는 경우에 곡선 $y=l(x)$를 y축으로 평행이동 하여 x축과 두 개 이상의 교점을 가지도록 할 수 있다.	5점
$l'(x)=\dfrac{2}{x}-2+\dfrac{b}{x^2}=-\dfrac{2x^2-2x-b}{x^2}$ 에서 $l(x)$가 극값을 가지려면 $2x^2-2x-b=0$이 중근이 아닌 양의 실근을 가져야 한다.	5점
$r(x)=2x^2-2x-b$라고 하면 $r(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값을 가지므로, 최솟값 $r\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}-b<0$을 만족하면 된다. 따라서 $b>-\dfrac{1}{2}$이다.	5점

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㅂ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) n명의 학생으로 구성된 모임에서 선거를 통해 대표단을 선출하려고 한다. 이 학생들 중에서 후보자를 결정하고 모임의 모든 학생을 대상으로 무기명 투표를 실시한 후, 투표 결과를 발표한다. 여기에서 투표 결과는 기권자수, 무효표수, 각 후보자의 득표수를 의미한다. 선거에 참가한 학생은 한 명의 후보에게만 투표할 수 있다. **단, 후보로 나온 학생은 자신에게 투표하고 그 표는 유효표가 된다고 가정한다.**

(ㄴ) k명의 후보자가 결정된 상황일 때, 투표 결과의 경우의 수를 a_k라고 하자. $(1 \le k \le n)$

(ㄷ) k명의 후보자가 결정된 상황에서 기권자수와 무효표수가 모두 0이라고 할 때, 투표 결과의 경우의 수를 b_k라고 하자. $(1 \le k \le n)$

(ㄹ) A를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

(ㅁ) B를 다음과 같이 정의한다.

$$B = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}$$

(ㅂ) **(이항정리)** 자연수 n에 대하여

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, x^r y^{n-r}$$

논제 1. $n=25$일 때, 제시문 (ㄹ)의 A의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 2. $n=25$일 때, 제시문 (ㅁ)의 B의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

본 문제는 주어진 상황에서 경우의 수의 의미를 이해하고, 이항정리를 응용할 수 있고, 여러 가지 수열의 합을 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 1. 주어진 상황에서 경우의 수의 의미를 이해하고 중복조합을 활용하여 경우의 수를 찾을 수 있는지를 평가한다. 또한, 이항정리를 활용할 수 있는지도 평가한다.

논제 2. 주어진 상황에서 경우의 수의 의미를 이해하고 중복조합을 활용하여 경우의 수를 찾을 수 있는지를 평가한다. 또한, 여러 가지 수열의 합을 활용할 수 있는지를 평가한다.

2) 문항해설

논제 1. 중복조합의 의미를 이해하고 이로부터 경우의 수를 계산할 수 있는지를 평가한다. 또한 이항정리를 활용할 수 있는지를 평가한다.

논제 2. 여러 가지 수열의 합을 활용할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

논제 1 [20점]

기권자수를 y, 무효표수를 z, 각 후보가 받은 득표수를 $x_1+1,\ \cdots,\ x_k+1$이라고 하자. (각 후보자는 최소한 한 표를 받으므로 $x_1, \cdots, x_k$는 음이 아닌 정수이다.) 그러면 투표 결과의 총 경우의 수는 $x_1+\cdots+x_k+y+z=n-k$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 이 중, $y=z=0$인 해의 개수는 서로 다른 k개에서 중복을 허용하여 $n-k$개를 택하는 조합의 수와 같은데, 이 값이 b_k이다. 따라서 $b_k = {}_k\mathrm{H}_{n-k} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이다.	10점
제시문 (ㅂ)의 이항정리에 의하여 $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = 2^{n-1}$이므로	5점
$A=\frac{1}{2}$이다.	5점

논제 2 [20점]

위의 논의로부터 a_k는 서로 다른 $k+2$개에서 중복을 허용하여 $n-k$개를 택하는 조합의 수와 같다. 즉, $a_k = {}_{k+2}\mathrm{H}_{n-k} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-k}$이다.	8점
$\frac{b_k}{a_k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \Big/ \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$이다.	4점
$B = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$ $= \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n+2}{3} = \frac{27}{3} = 9$ 이다. ($n=25$이므로)	8점