4. 의예과 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 두 함수 $f(x)=x^2+2nx+1$과 $g(x)=ke^x$에 대하여 점 A와 직선 l은 다음을 만족한다.
(단, n은 1보다 큰 자연수, k는 0 보다 작은 상수)

> 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 한 점 A에서 만나고 점 A에서 공통인 접선 l을 가진다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선 m이 x축과 만나는 점을 D라 하자.

(ㄹ) 제시문 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)의 점 A, B, C, D에 대하여 삼각형 OBC와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 a_n, b_n이라 하자.
(단, O는 원점이다.)

논제. 제시문 (ㄹ)의 a_n, b_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{n^2}$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

가) 주어진 두 함수가 한 점에서 만날 조건을 이해하고, 공통인 접선을 가질 때 접선의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다.
나) 평면좌표에서 접선과 접선에 수직인 직선을 구하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
다) 극한 값을 구할 수 있는지를 확인한다.

2) 문항해설

- 두 함수가 한 점에서 만난 조건을 이해하는지를 평가한다.
- 평면좌표에서 여러 가지 직선의 방정식을 구하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
- 주어진 수열의 극한 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

접점을 $\mathrm{A}(x_1, x_2)$이라 하면, 곡선 $y=x^2+2nx+1$과 곡선 $y=ke^x$가 접하기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다. 1) $x^2+2nx+1=ke^x$ 2) $2x+2n=ke^x$ 이를 연립해서 풀면 $x_1=1-2n$ 또는 $x_1=1$이고 $y=ke^x$에서 k는 0보다 작은 상수이므로 ke^{x_1}은 음수이다. 그러므로 $x=1-2n$이고 $(1-2n)^2+2n(1-2n)+1=2-2n$이므로 점 A는 $\mathrm{A}(1-2n, 2-2n)$이다.	40점
점 A에서 그은 접선 l과 접선 l에 수직인 직선 m을 각각 구하면 다음과 같다. $l: y-(2-2n)=(2-2n)(x-1+2n)$ $m: y-(2-2n)=-\frac{1}{2-2n}(x-1+2n)$ 따라서 점 $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$는 $\mathrm{B}(-2n, 0)$, $\mathrm{C}(0, -4n^2+4n)$, $\mathrm{D}(4n^2-10n+5, 0)$이다.	70점
삼각형 OBC와 삼각형 ABD의 넓이 a_n과 b_n은 $a_n=\frac{1}{2}2n(4n^2-4n)=4n^3-4n^2$ $b_n=\frac{1}{2}(4n^2-8n+5)(2n-2)=4n^3-12n^2+13n-5$ 이다.	40점
따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^3-4n^2)-(4n^3-12n^2+13n-5)}{n^2}=8$ 이다.	20점

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는 다음과 같다. (단, $a < 0$)

$$f(x) = -\sqrt{ax+b} - 2$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

1. 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = x$가 두 점에서 만난다.
2. 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 $g(x)$에 대하여, 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, S는 $a = k$에서 최댓값 M을 갖는다.

논제. 제시문 (ㄴ)의 $g(x)$및 제시문 (ㄹ)의 M과 k의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

가) 무리함수를 이해하고 역함수를 구할 수 있는지 확인한다.
나) 이차함수와 직선이 만나는 조건을 구할 수 있는지 확인한다.
다) 두 곡선으로 둘러싸인 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

2) 문항해설

- 무리함수의 역함수를 구하고 구한 함수의 정의역을 나타낼 수 있는지 평가한다.
- 이차함수와 직선이 두 점에서 만나는 조건을 구할 수 있는지 평가한다.
- 두 곡선으로 둘러싸인 넓이를 구하고 넓이가 최대가 되는 경우를 구할 수 있는지 평가한다.

3) 평가기준

$f(x)=-\sqrt{ax+b}-2$에서 $f(x) \le -2$이므로 $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4-b}{a}$, $x \le -2$	30점
$h(x)=g(x)-x=\dfrac{x^2+(4-a)x+4-b}{a}$ 라고 하면 $y=g(x)$와 $y=x$가 두 점에서 만나고, 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로, $h(x)=0$은 $x \le -2$에서 차가 1인 두 근을 가져야 한다. 두 근을 x_1, $x_2(x_2=x_1+1)$라 하고, 이러한 조건을 만족하는 경우를 살펴보면 1) $a<0$이므로 축 $x=-\dfrac{4-a}{2}< -2$를 만족한다. 2) $h(-2)=\dfrac{2a-b}{a}\le 0$이므로 $2a \ge b$를 만족해야 한다. 3) $(x_2-x_1)^2=(4-a)^2-4(4-b)=1$이므로 $b=\dfrac{1+8a-a^2}{4}$ 이어야 하고, 이때 $D=\dfrac{1}{a^2}((4-a)^2-4(4-b))=\dfrac{1}{a^2}$ 이므로, $D>0$을 만족한다. 2)와 3)에서 $2a \ge \dfrac{1+8a-a^2}{4}$, 즉 $a \le -1$이다.	80점
$S=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h(x)dx=\dfrac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx$ 이므로 $x=t+x_1$이라고 치환하면, $\dfrac{dx}{dt}=1$이고 $S=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^1 t(t-1)dt=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1=-\dfrac{1}{6a}$	40점
따라서 $k=-1$이고 M은 $\dfrac{1}{6}$이다.	20점

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 비어 있는 파란 상자와 1부터 100까지 자연수가 각각 적힌 카드가 100장이 들어 있는 빨간 상자가 있다. 빨간 상자에서 임의로 한 장의 카드를 뽑아 적혀 있는 수를 확인한 후, 그 수부터 100까지 자연수를 각각 적은 카드를 만들어 파란 상자에 넣는다. 그리고 파란 상자에서 임의로 한 장의 카드를 뽑는다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 파란 상자에서 뽑은 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X라고 하자.

(ㄷ) **[이산확률변수의 기댓값]** 이산확률변수 X의 확률질량함수 $p(x)$가 $p(x_i) = p_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$일 때, 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

논제. 제시문 (ㄴ)의 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (180점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

가) 조건부 확률의 뜻을 알고 이를 구할 수 있는지 확인한다.
나) 확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 확률변수의 기댓값을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

2) 문항해설

- 조건부 확률과 확률의 곱셈정리를 활용하여 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 이산확률변수의 기댓값을 이해하고 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

빨간 상자에서 k가 뽑힐 확률은 $\frac{1}{100}$이므로 확률변수 X에 대하여 확률 $\mathrm{P}(X=k)$은 다음과 같다. $\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(X=k\,\vert\,\text{빨간 상자에서 1이 뽑힘})+\mathrm{P}(X=k\,\vert\,\text{빨간 상자에서 2가 뽑힘})$ $+\cdots+\mathrm{P}(X=k\,\vert\,\text{빨간 상자에서 }k\text{가 뽑힘})$ $= \frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100-1}+\cdots+\frac{1}{100-k+1}\right),\ k=1,2,\cdots,100$	50점
따라서 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X=k) = 1\times\frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}\right)$ $+2\times\frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}\right)$ $+3\times\frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+\frac{1}{98}\right)$ $\vdots$ $+100\times\frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{1}\right)$	30점
$=\frac{1}{100}\left[\frac{1}{100}(1+2+\cdots+100)+\frac{1}{99}(2+3+\cdots+100)+\cdots+\frac{1}{1}(100)\right]$ $=\frac{1}{100}\left[\frac{1}{100}\frac{100(1+100)}{2}+\frac{1}{99}\frac{99(2+100)}{2}+\cdots+\frac{1}{1}\frac{1(100+100)}{2}\right]$ $=\frac{1}{100}\left(\frac{101}{2}+\frac{102}{2}+\cdots+\frac{200}{2}\right)$	80점
$=\frac{1}{200}\times\frac{100(101+200)}{2}=\frac{301}{4}$ 그러므로 구하는 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 $\frac{301}{4}$이다.	20점

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㅁ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 자연수 a, b, c, d는 다음을 만족시킨다.

$$1.\ c < a$$

$$2.\ d < b < a$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 자연수 a, b, c, d에 대하여 좌표공간의 점 A, B, C, D의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{A} = (a, 0, 0),\ \mathrm{B} = (a, d, 0),\ \mathrm{C} = (c, b, 0),\ \mathrm{D} = (0, b, 0)$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 점 A, B, C, D에 대하여 오각형 OABCD의 각 변의 길이를 오름차순으로 나열하면 다음과 같다. (단, O는 원점이다.)

$$1,\ 10,\ 20,\ 25,\ 26$$

(ㄹ) 제시문 (ㄴ)의 점 B, C에 대하여 삼각형 OBC의 무게중심을 E라 하자. (단, O는 원점이다.)

(ㅁ) 제시문 (ㄴ)의 점 B, C와 점 $\mathrm{F}(0, 0, 49)$를 지나는 평면을 α라 하자.

논제. 제시문 (ㄹ)의 점 E와 제시문 (ㅁ)의 평면 α 사이의 거리를 구하고 그 근거를 논술하시오. (180점)

[문항 4] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

1) 출제의도

가) 좌표공간에서 주어진 점들의 위치를 파악 할 수 있는지 확인한다.
나) 좌표공간에서 3개의 점이 주어졌을 때, 무게중심 및 평면의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다.
다) 점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있는지 확인한다.

2) 문항해설

- 피타고라스 정리를 이용하여 주어진 수들을 분류할 수 있는지를 평가한다.
- 무게중심의 의미와 평면의 방정식의 형식을 이해하고 주어진 점들로부터 구할 수 있는지를 평가한다.
- 점과 평면사이의 거리공식을 이용하여 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3) 평가기준

좌표공간의 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$의 좌표를 구하기 위해 $a-c=r$, $b-d=s$, 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 e라고 하면 피타고라스 정리에 의해 다음의 방정식을 얻을 수 있다. $e^2=r^2+s^2$(단, e, r, s는 자연수). $e=1$의 경우 위의 방정식을 만족하는 자연수 r, s가 존재하지 않는다. 따라서 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이 e는 $10, 20, 25, 26$ 중 하나이다.	40점
1) $e=10$인 경우, $(r, s)=(6, 8)$ 혹은 $(8, 6)$이다. 하지만 네 개의 수 $1, 20, 25, 26$에서 임의로 두 개의 수를 선택했을 때 그 차이가 8이 되는 경우가 없다. 따라서 $e \neq 10$. 2) $e=20$인 경우, $(r, s)=(12, 16)$ 혹은 $(16, 12)$이다. 하지만 네 개의 수 $1, 10, 25, 26$에서 임의로 두 개의 수를 선택했을 때 그 차이가 12가 되는 경우가 없다. 따라서 $e \neq 20$. 3-1) $e=25$인 경우, $(r, s)=(7, 24)$ 혹은 $(24, 7)$이다. 하지만 네 개의 수 $1, 10, 20, 26$에서 임의로 두 개의 수를 선택했을 때 그 차이가 7 혹은 24가 되는 경우가 없다. 3-2) $e=25$인 경우, $(r, s)=(15, 20)$ 혹은 $(20, 15)$이다. 하지만 네 개의 수 $1, 10, 20, 26$에서 임의로 두 개의 수를 선택했을 때 그 차이가 15 혹은 20가 되는 경우가 없다. 따라서 3-1)과 3-2)에 의해 $e \neq 25$. 4) $e=26$인 경우, $(r, s)=(10, 24)$ 혹은 $(24, 10)$이다. 이 경우에는 네 개의 수 $1, 10, 20, 25$에서 두 개의 수 25과 1을 선택하면 그 차이가 24, 두 개의 수 20과 10을 선택하면 그 차이가 10이 된다. 제시문 (ㄱ)에서 $b<a$이므로 $(a, c, r)=(25, 1, 24)$, $(b, d, s)=(20, 10, 10)$ 따라서 좌표공간의 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$의 좌표는 다음과 같다. $\mathrm{A}=(25, 0, 0)$, $\mathrm{B}=(25, 10, 0)$, $\mathrm{C}=(1, 20, 0)$, $\mathrm{D}=(0, 20, 0)$	80점

점 E가 삼각형 OBC의 무게중심이므로 점 E의 좌표는 다음과 같다. $$\mathrm{E}=\left(\frac{0+25+1}{3},\frac{0+10+20}{3},\frac{0+0+0}{3}\right)=\left(\frac{26}{3},10,0\right)$$	20점
세 점 B, C, $\mathrm{F}(0,0,49)$를 지나는 제시문 (ㅁ)에서 주어진 평면 α의 방정식을 $$kx+ly+mz=n$$ 이라 하고 주어진 세 점의 좌표를 대입하면 다음의 세 식을 얻을 수 있다. $$25k+10l=n,\ k+20l=n,\ 49m=n$$ k, l, m을 n으로 나타내면 $$49k=n,\ 245l=12n,\ 49m=n$$ 따라서 평면 α방정식은 $$5x+12y+5z=245$$ 이고 평면 α와 점 E사이의 거리는 다음과 같다. $$\frac{\left\lvert\frac{26\times5+30\times12-245\times3}{3}\right\rvert}{\sqrt{5^2+12^2+5^2}}=\frac{245}{3\sqrt{194}}$$	40점