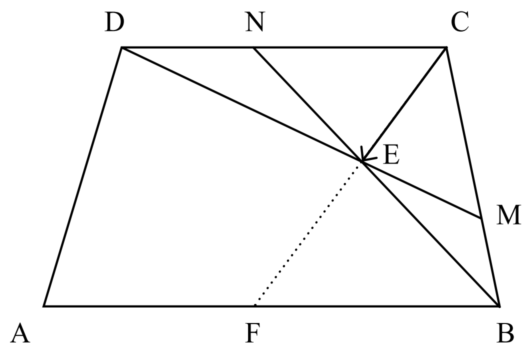
의예과 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

(ㄱ)

아래 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$가 서로 평행인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}$를 삼등분한 점 중 B에 가까운 점을 M, $\overline{\mathrm{CD}}$를 $3:2$로 내분한 점을 N, $\overline{\mathrm{BN}}$과 $\overline{\mathrm{DM}}$의 교점을 E, $\overline{\mathrm{CE}}$을 포함하는 직선과 $\overline{\mathrm{AB}}$를 포함하는 직선의 교점을 F라고 하자.



(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 그림에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$는 상수 m, n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = m\overrightarrow{\mathrm{CB}} + n\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

(ㄷ)

제시문 (ㄱ)의 그림에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$는 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = k\overrightarrow{\mathrm{CE}}$$

[논제] 제시문 (ㄴ)의 상수 m, n과 제시문 (ㄷ)의 상수 k를 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (100점)

[문항 1] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

그림에서의 평면 벡터를 이해하고 벡터의 평행 및 세 점은 한 직선 위에 있기 위한 벡터의 조건을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제다.

문항해설

세 점이 한 직선 위에 있기 위한 평면 벡터의 조건 및 벡터의 평행 조건을 활용하여 상수 m, n과 상수 k를 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제] (100점)

$\triangle\mathrm{CDM}$에서 점 E는 $\overline{\mathrm{DM}}$위에 있으므로 다음이 성립한다. $$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{CM}} \quad (0 \le t \le 1)$$ 한편, $\triangle\mathrm{BCN}$에서는 점 E가 $\overline{\mathrm{BN}}$위에 있으므로 $$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{CN}} + (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad (0 \le s \le 1)$$ 이다. 점 M은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 삼등분 점 중 점 B에 가까운 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 이고. 점 N은 $\overline{\mathrm{CD}}$를 $3:2$로 내분한 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 이다. 즉, $$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \frac{2}{3}(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{3}{5}s\,\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$ 이다.	30점
영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 가 서로 평행하지 않으므로 s, t는 $$t = \frac{3}{5}s \quad \Rightarrow \quad 3s - 5t = 0$$ $$\frac{2}{3}(1-t) = 1 - s \quad \Rightarrow \quad 3s - 2t = 1$$ 을 만족하고, 이를 연립해서 풀면 $s = \frac{5}{9}$, $t = \frac{1}{3}$이다. 그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, 즉 $m = \frac{4}{9}$ $n = \frac{1}{3}$이다.	30점

한편, $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 는 평행이므로 실수 l에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}=l\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 이다. 따라서 $$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+l\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$ 이고, 또 제시문 (ㄷ)에서 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=k\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ 를 만족하므로 $$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=k\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$ 이다.	30점
그러므로 $$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+l\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$ 이고, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 는 평행이 아니므로 $\frac{4}{9}k=1$, $\frac{1}{3}k=l$이다. 따라서, $k=\frac{9}{4}$이다.	10점

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

(ㄱ)

결승전에 오른 A, B두 팀이 다음과 같은 규칙에 따라 경기를 하여 우승팀을 정하려고 한다.

- 4번의 경기를 먼저 이기는 팀이 우승한다.
- 모든 경기는 승패가 결정되고 무승부는 없다.

(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 매 경기에서 각 팀이 이길 확률은 다음 조건을 만족시킨다.

- 첫 경기에서 이길 확률은 양 팀 모두 $\frac{1}{2}$이다.
- n번째까지의 경기 전적이 s승 t패인 팀이 $(n+1)$번째 경기를 이길 확률은 $\frac{5+(s-t)}{10}$이다.
  (단, $s+t=n$)

(ㄷ)

제시문 (ㄱ)의 결승전에서 두 번째 경기까지의 전적이 두 팀 모두 1승 1패인 사건을 E, 5번 이하의 경기에서 우승팀이 정해지는 사건을 F라고 하자.

(ㄹ)

[조건부확률] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

[논제] 제시문 (ㄷ)의 사건 E, F에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(E|F)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (100점)

[문항 2] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

가) 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 있는지 확인한다.
나) 조건부 확률의 뜻을 알고 이를 구할 수 있는지 확인한다.
다) 확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 사건의 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부 확률과 확률의 곱셈정리 활용하여 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제] (100점)

5번 이하의 경기에서 A팀이 우승팀으로 정해지는 경우는 4번째 또는 5번째 경기에서 A팀이 우승 팀으로 정해지는 경우이고 확률은 A는 A팀이 승리, B는 B팀이 승리하는 경우로 표시하면 다음과 같다. (1) $AAAA$의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{1680}{10^4}$ (2) $AAABA$의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{294}{10^4}$ (3) $AABAA$의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{378}{10^4}$ (4) $ABAAA$의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{420}{10^4}$ (5) $BAAAA$의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{420}{10^4}$	30점
따라서 5번 이하의 경기에서 A팀이 우승팀으로 결정될 확률은 위의 모든 경우의 확률을 더한 $\frac{3192}{10^4}$이고 같은 방법으로 5번 이하의 경기에서 B팀이 우승팀으로결정될 확률도 $\frac{3192}{10^4}$이다. 즉 제시문 (ㄴ)의 사건 F에 대하여 $\mathrm{P}(F)=\frac{6384}{10^4}$이다.	30점
또한 A팀이 우승팀일 때 $E\cap F$의 경우는 위의 (4), (5) 의 경우이고 그 확률은 $\frac{420\times 2}{10^4}=\frac{840}{10^4}$이다. 같은 방법으로 B팀이 우승팀일 경우의 확률이 같으므로 $\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1680}{10^4}$이다.	30점
그러므로 구하는 조건부 확률 $\mathrm{P}(E\mid F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{1680}{6384}=\frac{5}{19}$이다.	10점

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (110점)

(ㄱ)

함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = 2(1 - |t-1|) \qquad \left(0 \le t \le \frac{4}{3}\right)$$

(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 $f(t)$에 대하여 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x) = \int_0^x |x - f(t)|\,dt \qquad \left(0 \le x \le \frac{4}{3}\right)$$

(ㄷ)

제시문 (ㄴ)의 $g(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a 전체의 집합을 A라고 하자.

곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = ax$는 구간 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$에서 서로 다른 세 점에서 만난다.

[논제] 제시문 (ㄷ)의 A를 구하고 그 근거를 논술하시오. (110점)

[문항 3] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

가) 절댓값을 포함한 함수를 이해하는지 확인한다.
나) 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 이를 구할 수 있는지 확인한다.

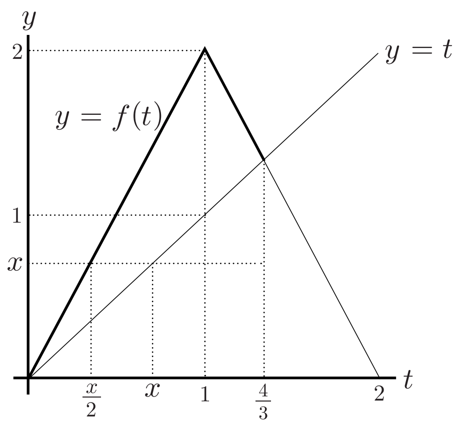
문항해설

- 주어진 함수 $f(t)$를 이해하는지를 평가한다.
- 정적분으로 정의된 함수 $g(x)$를 이해하고 함수를 정확히 구할 수 있는지를 평가한다.
- 미분을 이용하여 주어진 두 함수의 교점의 개수를 판단할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제] (110점)

$f(t)$는 $0 \le t \le 1$에서는 $f(t)=2t$, $1 \le t \le \frac{4}{3}$에서는 $f(t)=4-2t$이다.



그림에서와 같이 $0 \le x \le \frac{4}{3}$일 때, $x > f(t)$인 범위는 $0 \le t < \frac{x}{2}$이고, $x \le f(t)$인 범위는 $\frac{x}{2} \le t \le \frac{4}{3}$이므로

$$g(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} (x - f(t))dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} (f(t) - x)dt$$

이다. $\int_{\frac{x}{2}}^{x} (f(t) - x)dt$에서 $f(t)$는 t의 범위에 따라 달라진다,

따라서 $g(x)$는 x가 1보다 클 때와 작을 때에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

20점

1) $0 \le x \le 1$일 때

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x-f(t))dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} (f(t)-x)dt \\
&= \int_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} (2t-x)dt \\
&= [xt-t^2]_0^{\frac{x}{2}} + [t^2-xt]_{\frac{x}{2}}^{x} = \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

이 된다.

20점

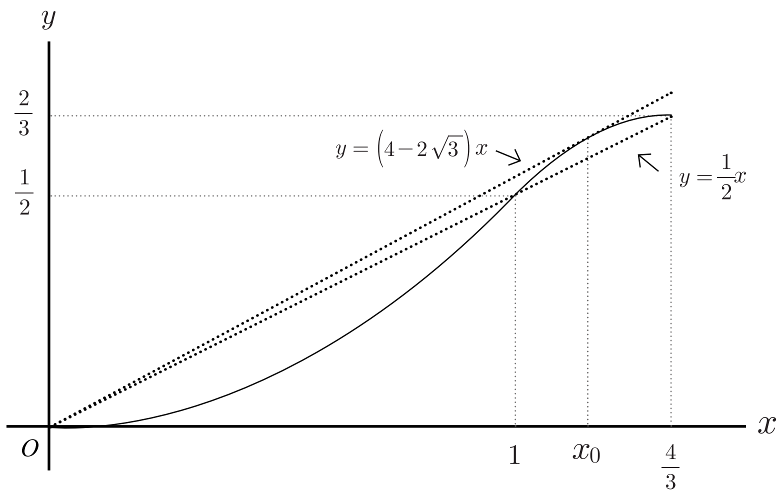
2) $1 < x \le \frac{4}{3}$일 때

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x-f(t))dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} (f(t)-x)dt \\
&= \int_0^{\frac{x}{2}} (x-2t)dt + \int_{\frac{x}{2}}^{1} (2t-x)dt + \int_1^{x} (4-2t-x)dt \\
&= [xt-t^2]_0^{\frac{x}{2}} + [t^2-xt]_{\frac{x}{2}}^{1} + [4t-t^2-xt]_1^{x} \\
&= -\frac{3x^2}{2}+4x-2
\end{aligned}
$$

이 된다. 따라서

$$
g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & (0 \le x \le 1) \\ -\frac{3x^2}{2}+4x-2 & \left(1 < x \le \frac{4}{3}\right) \end{cases}
$$

30점



또한 $y=g(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 위 그래프와 같이 $y=ax$가 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$를 지나야 하므로 직선의 기울기 a는 $\frac{1}{2}$ 이상이어야 하고, $y=g(x)$와 직선 $y=ax$가 구간 $\left[1,\ \frac{4}{3}\right]$에서 접할 때의 직선의 기울기보다 작아야 한다.	10점
이때 접하는 점의 x좌표를 x_0라고 하면, x_0은 $\begin{cases} -3x_0+4=a \\ -\frac{3}{2}x_0^2+4x_0-2=ax_0 \end{cases}$ 을 만족하고, 연립해서 풀면 양수인 x_0는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $a=4-2\sqrt{3}$ 이므로 직선의 기울기 a는 $4-2\sqrt{3}$ 보다 작아야 한다. 따라서 구하는 집합 $A=\left\{a \,\middle\|\, \frac{1}{2} \le a < 4-2\sqrt{3}\right\}$이다.	30점

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (110점)

(ㄱ)

[변량의 표준편차] n개의 변량 b_1, b_2, $\cdots$, b_n의 평균을 m이라고 할 때 표준편차 σ는 다음과 같다.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b_1 - m)^2 + (b_2 - m)^2 + \cdots + (b_n - m)^2}{n}}$$

(ㄴ)

$(k+1)$개의 변량 c, c_1, c_2, $\cdots$, c_k는 첫째 항이 c, 공차가 3, 항의 개수가 $(k+1)$개인 등차수열을 이룬다. (단, $k \geq 1$)

(ㄷ)

제시문 (ㄴ)의 변량 c, c_1, c_2, $\cdots$, c_k 의 표준편차를 σ_k라고 할 때 l은 다음과 같다.

$$l = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{2n^2 - k^2}$$

(ㄹ)

[수열의 극한값의 대소 관계] 수열의 극한값에 대하여 다음이 성립한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ (단, α, β는 실수) 일 때

1. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq b_n$이면 $\alpha \leq \beta$

2. 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$이고 $\alpha = \beta$이면

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$$

[논제] 제시문 (ㄷ)의 l의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (110점)

[문항 4] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

가) 변량의 평균 및 표준편차를 구할 수 있는지 확인한다.
나) 등차수열의 합을 구할 수 있는지 확인한다.
다) 정적분의 뜻을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
라) 극한값의 대소 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는지를 확인한다.

문항해설

- 등차 수열의 합을 이용하여 주어진 자료(변량)의 평균 및 표준편차를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 극한값의 대소 관계와 정적분의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가한다.
- 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제] (110점)

$(k+1)$개의 변량 c , c_1 , c_2 , $\cdots$, c_k의 평균 m은 다음과 같다.

$$m=\frac{c+(c+3)+\cdots+(c+3k)}{k+1}=c+\frac{3}{2}k$$

그러므로 표준편차 σ_k는

$$\sigma_k=\sqrt{\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left\{(c+3i-3)-\left(c+\frac{3k}{2}\right)\right\}^2}=\sqrt{\frac{9}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(i-1-\frac{k}{2}\right)^2}$$

$$=3\sqrt{\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left((i-1)^2-k(i-1)+\frac{k^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{k(k+2)}{12}}$$

이고 제시문 (ㄷ)의 l은

$$l=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2-k^2}\right)$$

20점

한편,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2-k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k^2}}{2n^2-k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

이고

20점

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2-k^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{(k+1)^2}}{2n^2-k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k+1}{n}}{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}$$

이다.

30점

정적분의 정의와 제시문 (ㄹ)의 1에 의해서 l은 다음의 두 부등식을 만족한다.

$$l \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{x}{2-x^2}\,dx$$

그리고

$$l \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{x}{2-x^2}\,dx$$

30점

따라서 제시문 (ㄹ)의 2에 의해서 제시문 (ㄷ)의 l은 다음과 같다.

$$l=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{x}{2-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(2-x^2\right)\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 2$$

10점