

자연

2021학년도 신입학 수시
모의 논술



성명	
----	--

지원 학부·학과	
----------	--

수험 번호																				
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.
- 90분 안에 답안을 작성하시오.
- 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
- 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

1. 답안지는 검정색 펜(블펜, 연필, 샤프)으로만 작성하시오.
(빨간색이나 파란색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(블펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내에 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
 - 1) 답안을 검정색 펜으로 작성하지 않은 경우
 - 2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
 - 3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
 - 4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

이 면은 여백입니다.

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

<나> 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 $g(0) = g'(0) = 1$ 을 만족한다.

<다> 미분가능한 함수 $y = h(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수는 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a)$ 이다.

1-1. 제시문을 이용하여 주어진 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x)) - 1}{x - 1}$ 의 값을 구하시오. [10점]

[풀이]

$f(1) = 0$ 이므로 제시문에 의하여 $g(f(1)) = 1$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x)) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x)) - g(f(1))}{x - 1} = (g \circ f)'(1)$$

여기서 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 라 두면 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이므로

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(0)f'(1)$$

한편 $f'(1) = -\frac{\pi}{2}$ 이고 $g'(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x)) - 1}{x - 1} = h'(1) = -\frac{\pi}{2}$$

1-2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(e^x - 1)} \int_0^x g(t)dt$ 의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(e^x - 1)} \int_0^x g(t)dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) \left(\frac{2x}{e^x - 1} \right) \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt \right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이다.

$G(x) = \int_0^x g(t)dt$ 라 하면

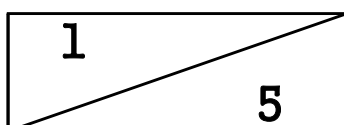
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = G'(0)$$

한편, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 2 \times 1 = 2$ 이다.

따라서 $G'(0) = g(0) = 1$ 이므로 구하는 값은 $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(e^x - 1)} \int_0^x g(t)dt = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

[뒷면에 계속]



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

정의역이 음이 아닌 실수집합이고 양의 값을 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\log_2 f(x)$ 의 정수 부분을 $p(x)$ 라 하고 소수 부분을 $q(x)$ 라 하자. 즉,

$$\log_2 f(x) = p(x) + q(x), \quad 0 \leq q(x) < 1$$

2-1. x 에 관한 함수 $h(x) = \log_2(x^2 + ax + 2)$ 와 어떤 음이 아닌 정수 n 에 대하여 방정식 $h(x) = n$ 의 음이 아닌 실근의 개수가 2개 이상이 되도록 하는 상수 a 의 범위를 구하고, 이때 가능한 n 을 모두 구하시오. (단, $x \geq 0$)
[15점]

[풀이]

$f(x) = x^2 + ax + 2$ 라 하면, 로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x) > 0$ ($x \geq 0$)이 성립해야 한다.

$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$ 에서 $a \geq 0$, $a < 0$ 인 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) $a \geq 0$:

✓ $x=0$ 에서 $f(x)$ 는 최솟값 $f(0) = 2$ 을 가지므로 $n=0$ 에 대하여 방정식 $f(0) = 2^0$, 즉 $h(x) = 0$ 을 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근 x 는 존재하지 않는다.

✓ 또한 $f(x)$ 는 $x \geq 0$ 영역에서 연속이고 증가함수이므로

$h(x) = \log_2(x^2 + ax + 2)$ 도 연속이고 증가함수이다.

따라서 자연수 n 에 대하여 $x^2 + ax + 2 = 2^n$, 즉 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$ 를 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근 x 의 개수가 하나뿐이다.

그러므로 $a \geq 0$ 일 경우, $x \geq 0$ 에 대하여 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$ 을 만족하는 실근의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n 은 존재하지 않는다.

(2) $a < 0$:

$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$ 으로부터 $x = -\frac{a}{2} > 0$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{a^2}{4} + 2$ 이다.

따라서 로그의 진수의 조건에 의하여, $-\frac{a^2}{4} + 2 > 0$ 이 성립하여야 하고 이때 a 의 범위는 다음과 같다.

$$-2\sqrt{2} < a < 0$$

한편 $f(0) = 2$ 이고 $f(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{a^2}{4} + 2 < 2$ 이므로 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

✓ $-2 \leq a < 0$:

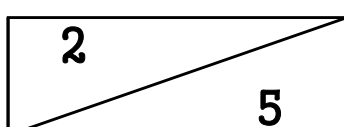
$1 \leq -\frac{a^2}{4} + 2 < 2$ 이므로 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$ 을 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근 x 의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n 은 1뿐이다.

✓ $-2\sqrt{2} < a < -2$:

$0 < -\frac{a^2}{4} + 2 < 1$ 이므로 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$ 을 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근 x 의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n 은 0과 1이다.

따라서 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$ 을 만족하는 음이 아닌 실근 x 의 개수가 2개 이상이 되는 상수 a 의 범위는 $-2\sqrt{2} < a < 0$ 이고 이때 가능한 음이 아닌 정수 n 은 0, 1이다.

[뒷면에 계속]



2-2. 제시문에서 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 $\log_2 f(x) = n$ 을 만족하는 음이 아닌 실근을 x_n 이라 하자. x_n 을 구하고 구간 $[x_n, x_{n+1})$ 에서 $q(x)$ 를 구하시오. [10점]

[풀이]

자연수 n 에 대하여 $\log_2(x^2 + 2x + 2) = n$ 을 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근 x_n 은 다음과 같다.

$$x_n = -1 + \sqrt{2^n - 1}$$

x 에 관한 함수 $h(x) = \log_2(x^2 + 2x + 2)$ 는 구간 $[x_n, x_{n+1})$ 에서

$$n \leq \log_2(x^2 + 2x + 2) < n + 1$$

이므로 구간 $[x_n, x_{n+1})$ 에서 $q(x)$ 는 다음과 같다.

$$q(x) = \log_2(x^2 + 2x + 2) - n$$

2-3. 제시문에서 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 일 때, 문제 2-2를 이용하여 $\int_0^{\sqrt{127}-1} (x+1)q(x)dx$ 의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

문제 2-2로부터 자연수 n 에 대하여 $\log_2(x^2 + 2x + 2) = n$ 을 만족하는 $x \geq 0$ 인 실근은 $x_n = -1 + \sqrt{2^n - 1}$

이고, 구간 $[x_n, x_{n+1})$ 에서 $q(x) = \log_2(x^2 + 2x + 2) - n$ 이다.

한편

$$\int (x+1)\log_2(x^2 + 2x + 2)dx = \frac{1}{2\ln 2} [(x^2 + 2x + 2)\ln(x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 2x + 2)] + C$$

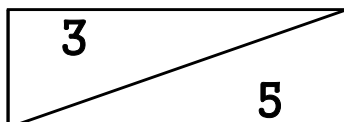
이므로 $I_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x+1)q(x)dx$ 라 두면,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2} \left[(x^2 + 2x + 2)\log_2(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{\ln 2}(x^2 + 2x + 2) \right]_{x_n}^{x_{n+1}} - n \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{x_n}^{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left((n+1)2^{n+1} - \frac{1}{\ln 2}2^{n+1} \right) - \left(n2^n - \frac{1}{\ln 2}2^n \right) \right] - n[(2^n - 1) - (2^{n-1} - 1)] \\ &= (n+2)2^{n-1} - \frac{1}{\ln 2}2^{n-1} - n2^{n-1} \\ &= \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right) 2^{n-1} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{127}-1} (x+1)q(x)dx &= \sum_{n=1}^6 I_n \\ &= \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right) \sum_{n=1}^6 2^{n-1} = 63 \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right) \end{aligned}$$

[뒷면에 계속]



[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> n 이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$ 의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1}b + {}_n C_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n C_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n C_n b^n \\ &= \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r}b^r \\ {}_n C_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\end{aligned}$$

<나> 어떤 사건이 일어날 확률이 p 이고 이 시행을 n 회 독립적으로 반복할 때 이 사건이 일어날 횟수를 확률변수 X 라 하자. 이때 확률변수 X 는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르며, X 의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$P(X=r) = {}_n C_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n)$$

<다> 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따른다고 할 때

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x=0}^n x {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = np \\ V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np(1-p)\end{aligned}$$

3-1. 제시문 <나>에서 확률변수 X 가 이항분포 $B(10, p)$ 를 따르고 $\sum_{r=0}^{10} P(X > r) = 2$ 일 때, 제시문 <다>를 이용하여 확률변수 $(X-a)^2$ 의 기댓값이 최소가 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{10} P(X > r) &= P(X > 0) + P(X > 1) + \cdots + P(X > 9) + P(X > 10) \\ &= \{P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=10)\} + \{P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=10)\} \\ &\quad + \{P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=10)\} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \{P(X=9) + P(X=10)\} + \{P(X=10)\} \\ &= P(X=1) + 2P(X=2) + \cdots + 10P(X=10) \\ &= \sum_{r=0}^{10} rP(X=r) = E(X) = 10 \times p = 2\end{aligned}$$

그러므로 $p = \frac{1}{5}$

제시문 <다>에 의하여 $E(X) = 10 \times \frac{1}{5} = 2$, $V(X) = 10 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$ 이므로

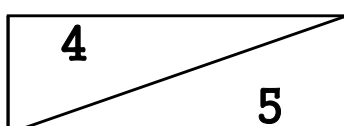
$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5}$$

그러므로

$$\begin{aligned}E((X-a)^2) &= E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2 \\ &= \frac{28}{5} - 4a + a^2 = (a-2)^2 + \frac{8}{5}\end{aligned}$$

따라서 $a=2$ 일 때 $E((X-a)^2)$ 은 최솟값 $\frac{8}{5}$ 을 가지므로, $a=2$ 이다.

[뒷면에 계속]



3-2. 한 개의 주사위를 n 번 던질 때 5이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하고, 이때 확률변수 X 가 k 일 확률을 $P(X=k)$ ($k=0,1,\dots,n$)라 하자. $m_n = \sum_{k=0}^n \cos(kn\pi)P(X=k)$ 라 할 때, $\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \log_3 m_j$ 를 구하시오.
[20점]

[풀이]

한 번의 시행에서 5이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 $P(X=k) = {}_n C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$ 이다.

(i) n 이 짝수일 때 $\cos(kn\pi) = 1$ 이 모든 k 에 대해서 항상 성립하므로

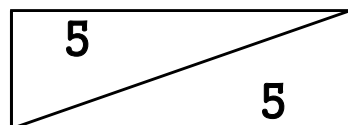
$$m_n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^n = 1$$

(ii) n 이 홀수일 때 $\cos(kn\pi) = (-1)^k$ 이므로,

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_n C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(-\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n = \frac{1}{3^n} \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \log_3 m_j &= \sum_{k=1}^n \{(-1)^{2k-1} \log_3 m_{2k-1} + (-1)^{2k} \log_3 m_{2k}\} \\ &= -\sum_{k=1}^n \log_3 \left(\frac{1}{3^{2k-1}}\right) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \end{aligned}$$



이 면은 여백입니다.