자연

2021학년도 신입학 수시

모의 논술

성명		지원 학부·학과		수험 번호	

· 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.

· 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.

· 90분 안에 답안을 작성하시오.

· 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.

· 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로만 작성하시오.
   (빨간색이나 파란색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내에 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정색 펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
   4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

이 면은 여백입니다.

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

<나> 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 $g(0)=g'(0)=1$을 만족한다.

<다> 미분가능한 함수 $y=h(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 $\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$이다.

1-1. 제시문을 이용하여 주어진 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{g(f(x))-1}{x-1}$의 값을 구하시오. [10점]

[풀이]

$f(1)=0$이므로 제시문에 의하여 $g(f(1))=1$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(f(x))-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(f(x))-g(f(1))}{x-1}=(g\circ f)'(1)$$

여기서 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라 두면 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(0)f'(1)$$

한편 $f'(1)=-\frac{\pi}{2}$이고 $g'(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(f(x))-1}{x-1}=h'(1)=-\frac{\pi}{2}$$

1-2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(e^x-1)}\int_0^x g(t)dt$의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(e^x-1)}\int_0^x g(t)dt=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{2x}{e^x-1}\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

이다.

$G(x)=\int_0^x g(t)dt$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=G'(0)$$

한편, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=2\times 1=2$이다.

따라서 $G'(0)=g(0)=1$이므로 구하는 값은 ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(e^x-1)}\int_0^x g(t)dt=1\times 2\times 1=2$$

[뒷면에 계속]

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

정의역이 음이 아닌 실수집합이고 양의 값을 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $\log_2 f(x)$의 정수 부분을 $p(x)$라 하고 소수 부분을 $q(x)$라 하자. 즉,

$$\log_2 f(x) = p(x) + q(x), \quad 0 \le q(x) < 1$$

2-1. x에 관한 함수 $h(x) = \log_2(x^2 + ax + 2)$와 어떤 음이 아닌 정수 n에 대하여 방정식 $h(x) = n$의 음이 아닌 실근의 개수가 2개 이상이 되도록 하는 상수 a의 범위를 구하고, 이때 가능한 n을 모두 구하시오. (단, $x \ge 0$) [15점]

[풀이]

$f(x) = x^2 + ax + 2$라 하면, 로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x) > 0$ $(x \ge 0)$이 성립해야 한다.

$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$에서 $a \ge 0$, $a < 0$인 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) $a \ge 0$:

✓ $x = 0$에서 $f(x)$는 최솟값 $f(0) = 2$을 가지므로 $n = 0$에 대하여 방정식 $f(0) = 2^0$, 즉 $h(x) = 0$을 만족하는 $x \ge 0$인 실근 x는 존재하지 않는다.

✓ 또한 $f(x)$는 $x \ge 0$ 영역에서 연속이고 증가함수이므로 $h(x) = \log_2(x^2 + ax + 2)$도 연속이고 증가함수이다.
따라서 자연수 n에 대하여 $x^2 + ax + 2 = 2^n$, 즉 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$를 만족하는 $x \ge 0$인 실근 x의 개수가 하나뿐이다.

그러므로 $a \ge 0$일 경우, $x \ge 0$에 대하여 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$을 만족하는 실근의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n은 존재하지 않는다.

(2) $a < 0$:

$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$으로부터 $x = -\frac{a}{2} > 0$에서 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{a^2}{4} + 2$이다.

따라서 로그의 진수의 조건에 의하여, $-\frac{a^2}{4} + 2 > 0$이 성립하여야 하고 이때 a의 범위는 다음과 같다.

$$-2\sqrt{2} < a < 0$$

한편 $f(0) = 2$이고 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{a^2}{4} + 2 < 2$이므로 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

✓ $-2 \le a < 0$:
$1 \le -\frac{a^2}{4} + 2 < 2$이므로 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$을 만족하는 $x \ge 0$인 실근 x의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n은 1뿐이다.

✓ $-2\sqrt{2} < a < -2$:
$0 < -\frac{a^2}{4} + 2 < 1$이므로 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$을 만족하는 $x \ge 0$인 실근 x의 개수가 2개 이상이 되는 음이 아닌 정수 n은 0과 1이다.

따라서 $\log_2(x^2 + ax + 2) = n$을 만족하는 음이 아닌 실근 x의 개수가 2개 이상이 되는 상수 a의 범위는 $-2\sqrt{2} < a < 0$이고 이때 가능한 음이 아닌 정수 n은 $0, 1$이다.

[뒷면에 계속]

2-2. 제시문에서 $f(x)=x^2+2x+2$일 때, 자연수 n에 대하여 $\log_2 f(x)=n$을 만족하는 음이 아닌 실근을 x_n이라 하자. x_n을 구하고 구간 $[x_n, x_{n+1})$에서 $q(x)$를 구하시오. [10점]

[풀이]

자연수 n에 대하여 $\log_2(x^2+2x+2)=n$을 만족하는 $x \geq 0$인 실근 x_n은 다음과 같다.

$$x_n = -1+\sqrt{2^n-1}$$

x에 관한 함수 $h(x)=\log_2(x^2+2x+2)$는 구간 $[x_n, x_{n+1})$에서

$$n \leq \log_2(x^2+2x+2) < n+1$$

이므로 구간 $[x_n, x_{n+1})$에서 $q(x)$는 다음과 같다.

$$q(x)=\log_2(x^2+2x+2)-n$$

2-3. 제시문에서 $f(x)=x^2+2x+2$일 때, 문제 2-2를 이용하여 $\int_0^{\sqrt{127}-1}(x+1)q(x)dx$의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

문제 2-2로부터 자연수 n에 대하여 $\log_2(x^2+2x+2)=n$을 만족하는 $x \geq 0$인 실근은 $x_n=-1+\sqrt{2^n-1}$이고, 구간 $[x_n, x_{n+1})$에서 $q(x)=\log_2(x^2+2x+2)-n$이다.

한편

$$\int (x+1)\log_2(x^2+2x+2)dx = \frac{1}{2\ln 2}\left[(x^2+2x+2)\ln(x^2+2x+2)-(x^2+2x+2)\right]+C$$

이므로 $I_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x+1)q(x)dx$라 두면,

$$I_n = \frac{1}{2}\left[(x^2+2x+2)\log_2(x^2+2x+2)-\frac{1}{\ln 2}(x^2+2x+2)\right]_{x_n}^{x_{n+1}} - n\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left((n+1)2^{n+1}-\frac{1}{\ln 2}2^{n+1}\right)-\left(n\,2^n-\frac{1}{\ln 2}2^n\right)\right]-n\left[(2^n-1)-(2^{n-1}-1)\right]$$

$$= (n+2)2^{n-1}-\frac{1}{\ln 2}2^{n-1}-n2^{n-1}$$

$$= \left(2-\frac{1}{\ln 2}\right)2^{n-1}$$

따라서

$$\int_0^{\sqrt{127}-1}(x+1)q(x)dx = \sum_{n=1}^{6} I_n$$

$$= \left(2-\frac{1}{\ln 2}\right)\sum_{n=1}^{6}2^{n-1} = 63\left(2-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

[뒷면에 계속]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> n이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r}b^r$$
$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<나> 어떤 사건이 일어날 확률이 p이고 이 시행을 n회 독립적으로 반복할 때 이 사건이 일어날 횟수를 확률변수 X라 하자. 이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르며, X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=r) = {}_nC_rp^r(1-p)^{n-r} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

<다> 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따른다고 할 때

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_xp^x(1-p)^{n-x} = np$$
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = np(1-p)$$

3-1. 제시문 <나>에서 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10, p)$를 따르고 $\sum_{r=0}^{10}\mathrm{P}(X>r) = 2$일 때, 제시문 <다>를 이용하여 확률변수 $(X-a)^2$의 기댓값이 최소가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$$\sum_{r=0}^{10}\mathrm{P}(X>r) = \mathrm{P}(X>0) + \mathrm{P}(X>1) + \cdots + \mathrm{P}(X>9) + \mathrm{P}(X>10)$$
$$= \{\mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) + \cdots + \mathrm{P}(X=10)\} + \{\mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=3) + \cdots + \mathrm{P}(X=10)\}$$
$$+ \{\mathrm{P}(X=3) + \mathrm{P}(X=4) + \cdots + \mathrm{P}(X=10)\}$$
$$+ \cdots$$
$$+ \{\mathrm{P}(X=9) + \mathrm{P}(X=10)\} + \{\mathrm{P}(X=10)\}$$
$$= \mathrm{P}(X=1) + 2\mathrm{P}(X=2) + \cdots + 10\mathrm{P}(X=10)$$
$$= \sum_{r=0}^{10} r\mathrm{P}(X=r) = \mathrm{E}(X) = 10\times p = 2$$

그러므로 $p = \frac{1}{5}$

제시문 <다>에 의하여 $\mathrm{E}(X) = 10\times\frac{1}{5} = 2$, $\mathrm{V}(X) = 10\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{5}$이므로

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5}$$

그러므로

$$\mathrm{E}((X-a)^2) = \mathrm{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2a\mathrm{E}(X) + a^2$$
$$= \frac{28}{5} - 4a + a^2 = (a-2)^2 + \frac{8}{5}$$

따라서 $a=2$일 때 $\mathrm{E}((X-a)^2)$은 최솟값 $\frac{8}{5}$을 가지므로, $a=2$이다.

[뒷면에 계속]

3-2. 한 개의 주사위를 n번 던질 때 5이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하고, 이때 확률변수 X가 k일 확률을 $\mathrm{P}(X=k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$라 하자. $m_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kn\pi)\mathrm{P}(X=k)$라 할 때, $\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\log_3 m_j$를 구하시오. [20점]

[풀이]

한 번의 시행에서 5이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(X=k)={}_nC_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$이다.

(i) n이 짝수일 때 $\cos(kn\pi)=1$이 모든 k에 대해서 항상 성립하므로

$$m_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n=1$$

(ii) n이 홀수일 때 $\cos(kn\pi)=(-1)^k$ 이므로,

$$m_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n=\frac{1}{3^n}\text{이다.}$$

따라서,

$$\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j\log_3 m_j=\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{2k-1}\log_3 m_{2k-1}+(-1)^{2k}\log_3 m_{2k}\right\}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(\frac{1}{3^{2k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

이 면은 여백입니다.