THE ENGINE OF
KOREA
HANYANG
UNIVERSITY

2021 한양대학교 ERICA
논술 출제의도 및 예시답안

ERICA 입학처 입학팀 2021.03.31

2021학년도 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

[수리논술 오후1 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉~〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값 M과 최솟값 m을 가지므로 다음 부등식이 성립한다.

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a)$$

〈나〉 실수 a가 아니면서 a에 충분히 가까운 모든 실수 x에 대하여 세 함수 f, g, h가 $f(x) \le g(x) \le h(x)$를 만족하며, $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ 이면 $\lim_{x \to a} g(x) = L$ 이다.

〈다〉 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 연속일 때, 그 구간에 속하는 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

〈라〉 함수 $F(x)$에 대한 도함수의 정의는 다음과 같다.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

1-1. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $I_n = \int_0^{a^n} f(x)dx$ 일 때, 제시문 〈가〉와 〈나〉를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ 임을 보이시오. (단, $0 < a < 1$이고 n은 자연수) [10점]

1-2. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $J_n = \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 일 때, 제시문 〈가〉 ~ 〈다〉를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} J_n = \int_0^1 f(x)dx$ 임을 보이시오. (단, $0 < a < 1$이고 n은 자연수) [10점]

1-3. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

제시문 〈가〉 ~ 〈라〉를 이용하여 $F'(x) = f(x)$ 임을 보이시오. [15점]

1. 출제 의도

수열의 극한의 다양한 성질을 이해하고 제시문에 주어진 조건과 함께 이를 활용하여 문제를 해결 할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

수열의 극한에 대한 다양한 성질이 있고 이를 활용하여 다양한 명제가 참임을 논리적으로 알 수 있다. 학생들이 제시문과 문항을 풀이하면서 참인 명제를 알게 되고 이를 활용하여 최종 문제를 해결하는 추론 능력과 문제해결력을 평가하는 문항이다. 이 과정에서 학생들의 식을 변형하는 능력과 창의적인 능력이 평가 될 수 있다. 때문에 평소 개념과 원리를 등한시 하고 답과 풀이과정을 암기하는 형태의 학습에 익숙한 학생들은 난관에 처할 수도 있다.

1-1. 주어진 수열의 극한값을 수열의 성질을 활용하여 참임을 보이는 문항으로 극한의 성질을 적용할 수 있어야 풀이를 할 수 있다.
1-2. 문제1-1의 상황보다 한 단계의 과정을 더 거쳐서 문제를 해결해야 한다.
1-3. 문제1-2의 상황보다 조금 더 복잡한 논리적 추론과 문제 해결력이 필요한 문항이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

1-1.
[풀이]
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이므로 제시문 〈가〉에 의해 이 구간에서 최대값 M과 최소값 m을 가지며
$m \cdot (a^n - 0) \le \int_0^{a^n} f(x)dx \le M \cdot (a^n - 0)$ 가 성립한다.

——[5점]

$I_n = \int_0^{a^n} f(x)dx$ 라 두면

$m \cdot a^n \le I_n \le M \cdot a^n$ 와 같고

$n \to \infty$일 때 $0 < a < 1$인 a에 대해서 $a^n \to 0$ 이므로 제시문 〈나〉에 의해 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ 이다.

——[10점]

1-2.
[풀이]
제시문 〈다〉에 의해 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{a^n} f(x)dx + \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 이 성립한다.

$J_n = \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 라 두면 $\int_0^1 f(x)dx = I_n + J_n$ 과 같다.

——[5점]

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(I_n + J_n)$ 이고 문제 1-1에 의해 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} J_n$ 이 성립한다.

——[10점]

1-3.

[풀이]

제시문 〈라〉의 도함수 정의에 의해

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ **이고**

제시문 〈다〉에 의해

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_0^{x+h} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$ **가 성립한다.**

--[5점]

제시문 〈가〉에 의해

$m \le f(x) \le M$ **인** m, M**이 존재해서**

$m \cdot h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le M \cdot h$ **가 성립하고 양변을** h**로 나누어 주면**

$m \le \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le M$ **가 성립한다.**

--[10점]

$h \to 0$ **일 때** $x+h \to x$ **이고** $f(x)$**는 닫힌구간** $[x, x+h]$**에서 연속이므로** $h \to 0$ **일 때**$f(x+h) \to f(x)$ **이므로** $h \to 0$**일 때**

$m = f(x) \le \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le M = f(x)$ **가 되어 제시문 〈나〉 에 의해** $\lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$ **가 된다.**

즉,

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$ **가 된다.**

--[15점]

[수리논술 오후1 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈다〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 어떤 시행에서 표본공간 S가 유한집합이고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

〈나〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $[a,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n=b$ 라고 하면 소구간의 길이 Δx 는 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ 이고, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ 에 대해 $x_k=a+k\Delta x$ 이다.

이 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$ 라고 하면, 극한값 $\lim_{n\to\infty}S_n$이 항상 존재하는데, 이 극한값을 $\int_a^b f(x)dx$ 로 나타낸다.

즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

〈다〉 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능하고, 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

2-1. 10개의 상자가 일렬로 배열되어 있고 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 한 개씩 들어있으며, 나머지 상자에는 공이 한 개 들어있거나 비어있다고 하자. 이 때, 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 <u>않을</u> 확률을 구하여라. (단, 상자마다 공이 한 개 들어있거나 비어있을 확률은 각각 $\frac{1}{2}$로 같다.) [15점]

2-2. n개의 서로 다른 공을 $2n$개의 서로 다른 상자에 모두 나누어 넣는다. 각 상자에는 공이 하나도 들어있지 않을 수 있으며 여러 개의 공이 들어있을 수도 있다. 각 상자에 한 개 이하의 공만 들어있을 확률을 p_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln p_n}{n}$을 구하여라. [20점]

1. 출제 의도

(1)확률과 통계 단원의 핵심으로 볼 수 있는 다양한 상황에서의 수학적 확률을 창의적이고 논리적으로 구할 수 있는지를 평가한다. (2)급수의 극한값을 정적분을 활용하여 계산할 수 있는지를 평가하고 그 과정에서 합성함수의 미분을 이해하고 적용할 수 있는 지를 평가한다.

2. 문항 해설

2–1. 수학적 확률에 대한 정확한 이해를 바탕으로 주어진 문제에 접근해야 되는 문항으로 주어진 문제 상황을 논리적으로 파악하고 경우의 수를 나누어서 확률의 덧셈정리를 적용해서 풀이해야 한다. 이 과정에서 문제 상황을 분석하고 조건에 맞는 해결방안을 모색하는 능력이 필요하다.

2–2. 주어진 문제 상황에서 논리적으로 확률을 구한 뒤 극한값을 구하는 과정에서 정적분을 어떻게 적용하여 문제를 해결해야 하는지 학생 스스로 파악해야 하며 이를 위해 창의적이고 논리적인 과정이 필요하다. 또한 계산 과정에서 합성함수의 미분의 개념을 정확하게 사용하야 정답을 구할 수 있다.

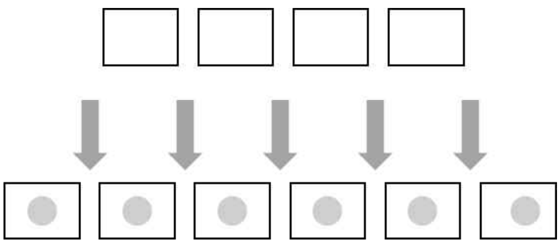
3. 예시 답안 혹은 정답

2–1.

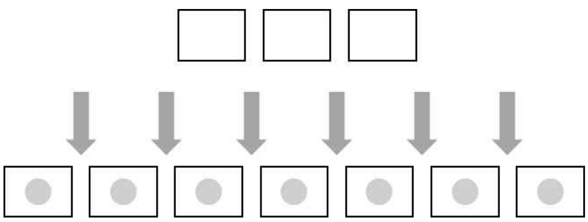
[풀이]

10개의 상자가 일렬로 배열되어 있으며 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 하나씩 들어있고 나머지 상자에 공이 하나 들어있던지 비어있을 전체 경우의 수는 2^8 이다. 나열된 상자 중 맨 앞과 맨 뒤를 제외하고 나머지 8개 상자에 공을 4개 이상 넣어야 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 할 수 있다. 공을 넣을 상자를 먼저 배열한 뒤 그 상자들 사이를 선택하여 나머지 비어있는 상자를 배열하면 다음과 같다.

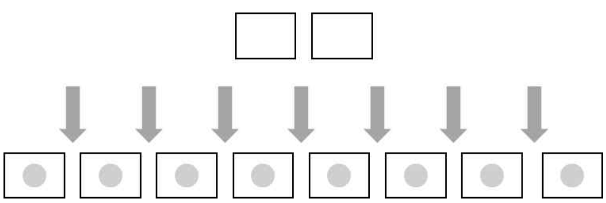
case1 : 공을 4개를 나누어 넣는 경우는 ${}_5C_4$이다.



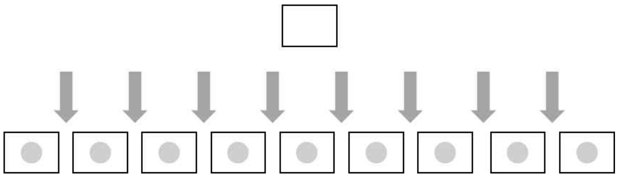
case2 : 공을 5개를 나누어 넣는 경우는 ${}_6C_3$이다.



case3 : 공을 6개를 나누어 넣는 경우는 ${}_7C_2$이다.



case4 : 공을 7개를 나누어 넣는 경우는 ${}_{8}C_{1}$이다.



case5 : 공을 8개를 나누어 넣는 경우는 ${}_{9}C_{0}$이다.

${}_{5}C_{4} + {}_{6}C_{3} + {}_{7}C_{2} + {}_{8}C_{1} + {}_{9}C_{0} = 55$

따라서 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않을 확률은 $\frac{55}{2^8} = \frac{55}{256}$ 이다.

———[15점]

2-1. [별해]

n개의 상자가 일렬로 배열되어 있으며 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 하나씩 들어있고 나머지 상자에 공이 하나 들어있던지 비어있을 전체 경우의 수는 2^{n-2} 이다.

a_n을 n개의 일렬로 배열된 상자 중 양쪽 끝에는 공이 하나씩 들어있으며, 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있을 경우의 수라 하자.

두 번째 상자에 공이 하나 들어있는 경우 : 첫 번째 상자를 제외한 나머지 $n-1$개의 상자 중 양쪽 끝에 공이 하나씩 들어가고 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있어야 하므로 이 경우의 수는 a_{n-1} 이다.

두 번째 상자가 비어있는 경우 : 세 번째 상자에는 반드시 공이 하나 들어있어야 한다. 따라서, 첫 번째와 두 번째 상자를 제외한 나머지 $n-2$개의 상자의 양쪽 끝에는 공이 하나씩 들어가고 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있어야 하므로 이 경우의 수는 a_{n-2} 이다.

따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 인 수열이 된다.

$n=2$인 경우 두 상자 모두 공이 들어있으므로 $a_2 = 1$

$n=3$인 경우 양쪽 끝에는 공이 들어있고 가운데는 공이 들어있을 수도 비어있을 수도 있으므로 $a_3 = 2$

나머지는 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$에 의하여 $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, $a_8 = 21$, $a_9 = 34$, $a_{10} = 55$

따라서 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않을 확률은 $\frac{55}{2^8} = \frac{55}{256}$ 이다.

———[15점]

2-2.

[풀이]

n개의 서로 다른 공을 $2n$개의 서로 다른 상자에 넣는 방법은 $(2n)^n$가지이다.

어떤 상자에든 한 개 이하의 공만 들어있는 경우는 ${}_{2n}P_n$가지이므로, 확률 $p_n = \frac{{}_{2n}P_n}{(2n)^n}$이다.

———[5점]

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{{}_{2n}P_n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-n+2}{n} \cdot \frac{2n-n+1}{n} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+n}{n} \cdot \frac{n+n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$\ln p_n = \ln\frac{1}{2^n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) = \ln\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

[10점]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln p_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} = -\ln 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= -\ln 2 + \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = -\ln 2 + \left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right]_0^1$$

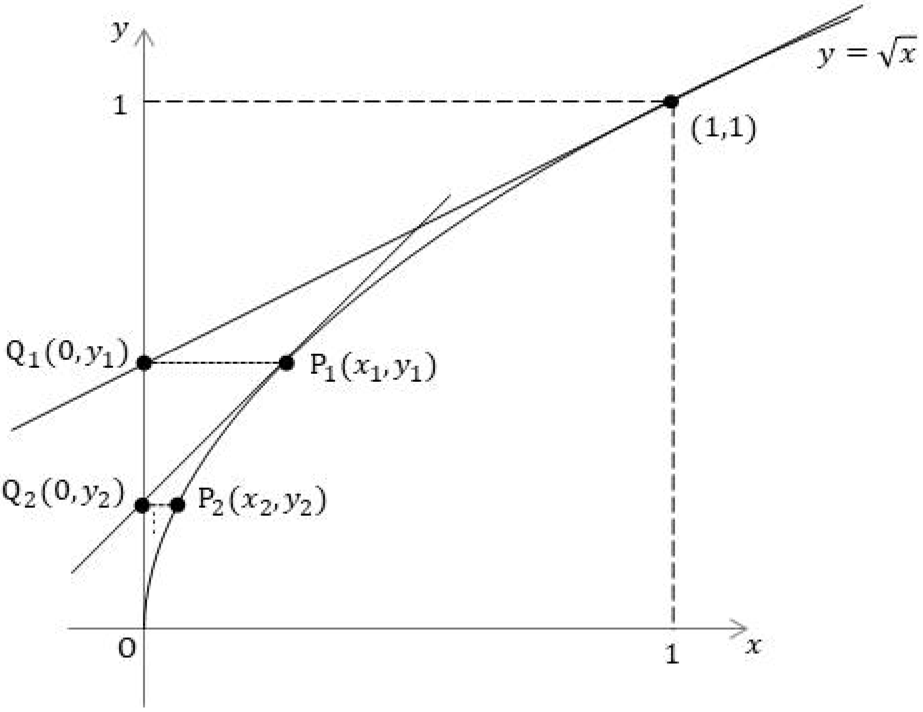
$$= -\ln 2 + 2\ln 2 - 1 = \ln 2 - 1$$

[20점]

[수리논술 오후1 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 y축과의 교점을 $\mathrm{Q}_1(0,y_1)$이라 하고 점 Q_1을 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점을 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$라 하자. 점 P_1에서의 접선과 y축과의 교점을 $\mathrm{Q}_2(0,y_2)$라 하고 점 Q_2를 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점을 $\mathrm{P}_2(x_2,y_2)$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 점을 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$이라 하자.



〈나〉 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이고, $r\neq 1$일 때 첫째항부터 제 n항까지의 합은 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$이다. 또한 $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-r}$이다.

3-1. 제시문 〈가〉에서 점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$의 좌표를 구하여라. **[10점]**

3-2. 점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$에서 곡선 $y=\sqrt{x}$에 접하는 직선과 y축 및 곡선 $y=\sqrt{x}$로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$을 구하여라. **[20점]**

1. 출제 의도

무리함수의 미분을 활용하여 접선을 구하고 이를 일반화시키고 곡선과 직선으로 이루어진 부분의 넓이를 정적분을 활용하여 구하는 수행 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

3-1. 무리함수의 미분을 정확하게 수행하고 주어진 접점에서 접선을 구할 수 있어야 하며 주어진 조건에 의해 연쇄적으로 일어나는 시행의 일반화를 할 수 있어야 한다.

3-2. 무리함수와 직선이 이루는 부분의 넓이를 구하기 위해 정적분을 사용해야 하는데 이 과정에서 정확한 개념이 필요하며 무리함수의 적분을 수행해야 한다.

3. 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

점 $(1,\,1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 즉, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 점 Q_1의 좌표는 $\mathrm{Q}_1\left(0,\,\frac{1}{2}\right)$이고 $y_1=\frac{1}{2}$ 이고, 점 $\mathrm{P}_1(x_1,\,y_1)$의 좌표는 $\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{4},\,\frac{1}{2}\right)$이다. 즉 $x_1=\frac{1}{4}$.

점 $\mathrm{P}_n(x_n,\,y_n)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_n=\frac{1}{2\sqrt{x_n}}(x-x_n)\ \Rightarrow\ y-\sqrt{x_n}=\frac{1}{2\sqrt{x_n}}(x-x_n)$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{x}{2\sqrt{x_n}}+\frac{\sqrt{x_n}}{2}$$

따라서 $\mathrm{Q}_{n+1}(0,\,y_{n+1})$의 좌표의 $y_{n+1}=\frac{\sqrt{x_n}}{2}$ 이므로 $\sqrt{x_{n+1}}=\frac{\sqrt{x_n}}{2}$이다. 따라서 $x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$ 이므로 $x_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이고 $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다. 따라서 $\mathrm{P}_n(x_n,\,y_n)$의 좌표는 $\mathrm{P}_n(x_n,\,y_n)=\mathrm{P}_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n,\,\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$이다.

---[10점]

3-2.

[풀이]

$$A_n=x_ny_n-\frac{1}{2}x_n(y_n-y_{n+1})-\int_0^{x_n}\sqrt{x}\,dx$$

$$=x_n\sqrt{x_n}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n+1}}\right)-\frac{2}{3}x_n\sqrt{x_n}$$

$$=-\frac{1}{6}x_n\sqrt{x_n}+x_n\sqrt{x_{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

———————————————————————————————————————[20점]

[수리논술 오후2 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

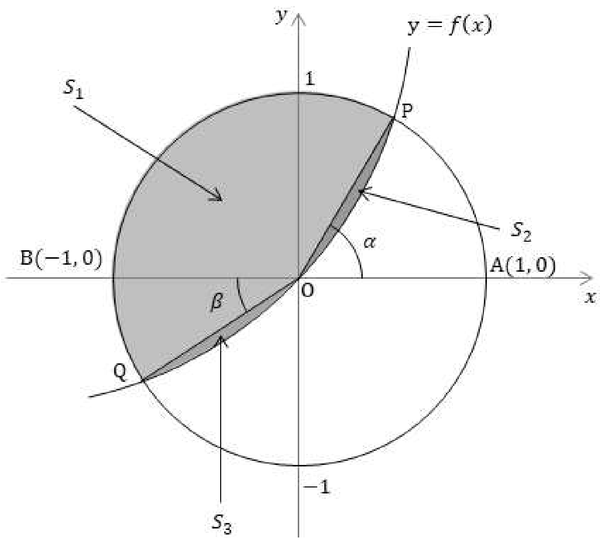
〈가〉 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\, y_1)$을 지나는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2$$

〈나〉 $a>0,\ b>0$ 이면 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이다. (단, 등호는 $a=b$일 때만 성립)

〈다〉 좌표평면의 원점 O 에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 하고, 일반각의 크기 θ가 나타내는 동경을 OP 라 하자. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 OP 가 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,\, y)$라 할 때, $x=r\cos\theta$ 이고 $y=r\sin\theta$ 이다.

〈라〉



1-1. 직선 $y=ax+1$과 원 C: $x^2+y^2=1$의 제3사분면에서의 교점을 R이라 하자. 점 R에서의 원의 접선이 직선 $y=-2$와 만나는 점과, 두 직선 $y=ax+1$과 $y=-2$가 만나는 점 사이의 거리의 최솟값과 그 때의 a의 값을 구하여라. (단, $a>1$) **[15점]**

1-2. 제시문 〈라〉에 있는 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2+2mx$와 원 C: $x^2+y^2=1$의 두 교점 중 제1사분면에 위치한 점을 P라 하자. 원점 O와 점 $\mathrm{A}(1,0)$에 대하여 $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 할 때, m을 α로 나타내어라. (단, $m>1$) **[10점]**

1-3. 1-2에서 정의된 곡선 $f(x)$와 원 C의 두 교점 중 제3사분면에 위치한 점을 Q라 하고, 점 $\mathrm{B}(-1,0)$에 대하여 $\angle\mathrm{BOQ}=\beta$라 하자. 제시문 〈라〉의 그림과 같이 부채꼴 POQ를 S_1, 선분 OP와 함수 $f(x)$로 둘러싸인 영역을 S_2, 선분 OQ와 함수 $f(x)$로 둘러싸인 영역을 S_3이라 하자. 이 때, 세 영역 S_1, S_2, S_3의 넓이를 각각 α, β로 나타내어라. **[20점]**

1. 출제 의도

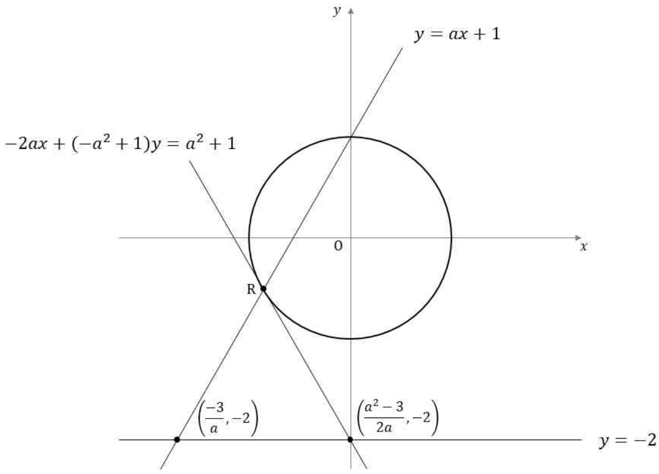
(1) 조건을 만족하는 점에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, (2) 각을 이용하여 점의 좌표를 표현하고 활용할 수 있는지, 그리고 (3) 삼각함수의 정적분을 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하기 위해 출제된 문항이다.

2. 문항 해설

1-1. 직선과 곡선의 교점의 좌표를 구하고, 이를 활용하여 곡선의 접선의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문에 주어진 산술평균과 기하평균의 관계를 활용하여 최솟값을 구한다.
1-2. 삼각함수의 정의를 이해하고 점의 좌표를 각을 이용하여 나타낸다.
1-3. 삼각함수의 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

1-1.
[풀이]
C : $x^2+y^2=1$ 와 $y=ax+1$의 교점은
$x^2+(ax+1)^2=1$, $(a^2+1)x^2+2ax=0$
$x\neq 0$의 해는, $x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$, $y=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$
따라서 R$\left(-\dfrac{2a}{a^2+1}, \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$이 되고, 점 R 에서 접하는 접선의 방정식은 제시문 <가>를 이용하여
$-\dfrac{2a}{a^2+1}x+\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}y=1$, $-2ax+(-a^2+1)y=a^2+1$
직선 $y=ax+1$이 직선 $y=-2$와 만나는 점 $y=-2$이면, $x=-\dfrac{3}{a}$ 이므로 $\left(-\dfrac{3}{a}, -2\right)$
접선 $-2ax+(-a^2+1)y=a^2+1$ 이 직선 $y=-2$와 만나는 점 $y=-2$이면, $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ 이므로 $\left(\dfrac{a^2-3}{2a}, -2\right)$
이 때, 제시문 <나>를 이용하면,
$$\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$
이 때, 등호가 성립하는 것은 $a=\dfrac{3}{a}$, $a=\sqrt{3}$
따라서 $a=\sqrt{3}$일 때, 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.



——————————————————————————————————————[15점]

1-2.

[풀이]

$f(x)=x^2+2mx$**에 대해, 점** $\mathrm{P}(\cos\alpha,\sin\alpha)$**가 곡선** $y=f(x)$ **위에 있으므로,** $\sin\alpha=\cos^2\alpha+2m\cos\alpha$

따라서, $m=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

——————————————————————————————————————[10점]

1-3.

[풀이]

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$

선분 OP : $y=x\tan\alpha$ **와 곡선** $y=f(x)$**로 둘러싸인 부분의 면적** S_2**는 제시문 〈나〉를 이용하여**

$S_2=\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}(-x^2+x\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}cos^3\alpha$

$Q(-\cos\beta,-\sin\beta)$**에서, 선분** OQ : $y=x\tan\beta$ **와 곡선** $y=f(x)$**로 둘러싸인 부분의 면적** S_3**는 제시문 〈나〉를 이용하여**

$S_3=\displaystyle\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}(-x^2-x\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$

$S=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$.

——————————————————————————————————————[20점]

[수리논술 오후2 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속일 때, $[a,\,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a=x_0,\,x_1,\,\cdots,\,x_n=b$라고 하면 소구간의 길이 Δx는 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$이고 $k=0,\,1,\,\cdots,\,n$에 대해 $x_k=a+k\Delta x$이다.

이 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$라고 하면 극한값 $\lim_{n\to\infty}S_n$이 항상 존재하는데, 이 극한값을 $\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.

즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

〈나〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

2-1. 함수 $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$에 대하여, $a_n=\int_0^n f(x)dx$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수) [10점]

2-2. 제시문 〈가〉와 2-1의 결과를 이용하여, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\ln(1-a_k)$의 값을 구하여라. [15점]

1. 출제 의도

(1) 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지, (2) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다.

2. 문항 해설

2-1. 미적분 교과에서 학습한 여러 가지 적분법 중 치환적분법을 활용하여 지수함수의 정적분의 값을 구하는 문항이다.
2-2. 급수로 표현된 식을 정적분으로 변형하여 값을 구하는 문항이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

2-1.

[풀이]

$$a_n = \int_0^n x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\frac{x^2}{2} = t$로 치환

$$x\,dx = dt$$

$$a_n = \int_0^{\frac{n^2}{2}} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{n^2}{2}}$$

$$= -e^{-\frac{n^2}{2}} + e^0$$

$$= 1 - e^{-\frac{n^2}{2}}$$

그러므로 $a_n = 1 - e^{-\frac{n^2}{2}}$

--[10점]

2-2.

[풀이]

$1 - a_k = e^{-\frac{k^2}{2}}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \ln(1-a_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(e^{-\frac{k^2}{2}}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

이때 $x_x = \frac{k}{n}$이라 하면, $\Delta x = \frac{1}{n}$이므로 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진식}) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

--[15점]

[수리논술 오후2 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 실수계수를 갖는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 $D=b^2-4ac$라 하자. (단, $a \neq 0$)

1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2) $D=0$이면 중근을 갖는다.

〈나〉 미분 가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 다음과 같다.

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

3-1. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$에 대하여 점$(b,0)$에서 서로 다른 2개의 접선을 그을 수 있다. 이 때, b의 값이 될 수 <u>없는</u> 정수를 모두 구하여라. [15점]

3-2. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$과 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 점$(4,0)$에서 함수 $f(x)$에 대한 접선의 기울기가 a일 때, 미분 가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $g'(a)$를 구하여라. (단, $x>2$) [15점]

1. 출제 의도

(1) 지수함수의 미분법을 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지, (2) 조건에 맞는 함수를 구하고 합성함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다.

2. 문항 해설

3-1. 지수함수의 미분을 활용하여 주어진 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 이차방정식의 판별식을 활용하여 구하는 문제이다.

3-2. 문제에서 정의한 함수를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

$y = (x-4)e^x \Rightarrow y' = (x-3)e^x$

곡선 위의 점 $\left(x_1, (x_1-4)e^{x_1}\right)$에서의 접선의 방정식 $y-(x_1-4)e^{x_1} = (x_1-3)e^{x_1}(x-x_1)$

$(b, 0)$을 지나므로 $-(x_1-4)e^{x_1} = (x_1-3)e^{x_1}(b-x_1)$

$\Rightarrow -(x_1-4) = (x_1-3)(b-x_1)$

$\Rightarrow (x_1-b)(x_1-3) = x_1-4$

$\Rightarrow x_1^2-(3+b)x_1+3b = x_1-4$

$\Rightarrow x_1^2-(4+b)x_1+3b+4 = 0$

서로 다른 두 실근 : $(4+b)^2-4(3b+4) > 0$

$\Rightarrow b^2+8b+16-12b-16 > 0$

$\Rightarrow b^2-4b > 0$

$\Rightarrow b > 4, b < 0$

정수 : $b = 0, 1, 2, 3, 4$

--[15점]

3-2.

[풀이]

$f'(g(t)) = t$

$g(t) = x$ 라하면 $t = f'(g(t)) = f'(x) = (x-3)e^x$

$\Rightarrow g\left((x-3)e^x\right) = x$

양변을 미분하면

$\Rightarrow g'\left((x-3)e^x\right) \cdot (x-2)e^x = 1$

$\Rightarrow g'\left((x-3)e^x\right) = \dfrac{1}{(x-2)e^x}$

$g'(e^4) = \dfrac{1}{2e^4}$

--[15점]