2025학년도 중앙대학교
모의 논술

- 자연계열 문제지 -

대학	학과(학부)	수험 번호	성명

❑ 답안 작성 시 유의 사항

1. 문제지는 표지를 제외하고 모두 4페이지로 구성되어 있습니다.
2. 연습지가 필요할 경우 문제지의 여백을 이용하시오.
3. 답안지의 수험 번호 표기란에는 반드시 컴퓨터용 수성 사인펜으로 표기하고, 답안은 흑색 필기구를 사용하여 작성하시오.
4. 답안지는 한 장만 사용하시오.
5. 답안을 작성할 때 답과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오.
6. 답안은 반드시 문항별로 지정된 구역에만 작성하시오. (지정 구역을 벗어난 답안은 채점이 불가능합니다.)

※ 위의 내용을 정확히 숙지하였음을 확인합니다: 응시자 성명 ____________________ (서명)

CHUNG-ANG UNIVERSITY

[문제 1] 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 2부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 7장의 카드가 들어 있다. 이때 다음과 같은 시행을 한다.

- 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A를 선택하고, 아니면 주머니 B를 선택한다.
- 선택한 주머니에서 두 장의 카드를 동시에 꺼낸다.
- 두 장의 카드에 적힌 수 중 작은 수를 a, 큰 수를 b라고 할 때, a와 b가 $b^3-6ab^2+11a^2b-6a^3=0$을 만족하면 $\dfrac{b}{a}$점의 점수를 획득하고, 그렇지 않으면 $b-a$점의 점수를 획득한다.

위의 시행을 한 번 할 때, 획득하는 점수의 기댓값을 구하시오. **[20점]**

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

- 탄젠트함수의 덧셈정리는 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문제 2-1] 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n>0) \\ a_n & (a_n=0) \\ a_n+d & (a_n<0) \end{cases} \quad (\text{단, } d\text{는 자연수})$$

이다. 다음 성질을 만족하는 자연수 d를 모두 구하시오. **[10점]**

> $a_m=0$을 만족하는 m의 최솟값은 7이다.

[문제 2-2] n이 자연수일 때, y축 위의 점 $(0, n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선을 l_n이라 하고, l_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ_n이라 하자. x축과 l_n, l_{n+1}로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n\tan(\theta_n-\theta_{n+1})}{n^2}$을 구하시오. **[15점]**

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.
$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

- 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.
$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

[문제 3-1] 일반항이 $a_n = \displaystyle\int_1^e (x\ln x - x)^n \ln x\,dx$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} a_k a_{k+1}$을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-2] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 $y^2-(x^2+x+1)y+x^3+x^2=0$을 만족한다. 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(5,0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값을 구하시오. **[15점]**

[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 중심이 (a,b,c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이다.
- 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이다. (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)
- 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.

[문제 4-1] 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=1$을 S라 하자. 중심이 구 S 위에 놓여있고 반지름의 길이가 7인 구가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 이루는 세 원을 각각 C_1, C_2, C_3라 하자. C_1, C_2, C_3의 넓이의 합을 A라 할 때, $\dfrac{A}{\pi}$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. **[15점]**

[문제 4-2] 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$인 타원 E가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) 타원 E 위의 두 점과 점 F를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 최댓값이 $4\sqrt{10}$이다.
(나) 기울기가 $\sqrt{3}$이고 타원 E에 접하는 두 직선 사이의 거리가 6이다.

직선 $y=x+c$가 타원 E와 점 P, Q에서 만날 때, 삼각형 PQF의 넓이를 구하시오. (단, $c>0$) **[15점]**

- 끝 -