2024학년도 중앙대학교
모의 논술

- 자연계열 문제지 -

대학	학과(학부)	수험 번호	성명

❑ 답안 작성 시 유의 사항

1. 문제지는 표지를 제외하고 모두 4페이지로 구성되어 있습니다.
2. 연습지가 필요할 경우 문제지의 여백을 이용하시오.
3. 답안지의 수험 번호 표기란에는 반드시 컴퓨터용 수성 사인펜으로 표기하고, 답안은 흑색 필기구를 사용하여 작성하시오.
4. 답안지는 한 장만 사용하시오.
5. 답안을 작성할 때 답과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오.
6. 답안은 반드시 문항별로 지정된 구역에만 작성하시오. (지정 구역을 벗어난 답안은 채점이 불가능합니다.)

※ 위의 내용을 정확히 숙지하였음을 확인합니다: 응시자 성명 ____________________ (서명)

CAU CHUNG-ANG UNIVERSITY

[문제 1] 검은 공 4개와 흰 공 2개가 들어있는 주머니가 있다. 이때, 원점에 놓여있는 점 P를 다음 규칙에 따라 좌표평면 위에서 이동시키는 시행을 한다.

- 주머니에서 1개의 공을 꺼낸 후, 이 공이 검은 공일 경우 점 P를 (x, y)에서 $(2x+2, y)$로 이동시키고, 흰 공일 경우 (x, y)에서 $(x, 3y-3)$으로 이동시킨다.
- 점 P를 이동시킨 후 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣는다.

이와 같은 시행을 4번 반복한 후, 점 P의 x좌표와 y좌표의 합의 기댓값을 구하시오. **[20점]**

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
- 모든 실수 α, β에 대하여 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$가 성립한다.
- 탄젠트 함수의 덧셈정리는 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문제 2-1] 닫힌구간 $[0,2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x-3\sin x+\sin(2x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가질 때, $\sin a$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 2-2] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(2,1)$과 직선 $x+y=0$ 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 최댓값을 구하시오. (단, $0\le x\le 2$ 이다.) **[15점]**

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

- 양의 실수 x, y에 대하여 $\ln(xy)=\ln x+\ln y$가 성립한다.

- 모든 자연수 n에 대하여 다음 식이 성립한다.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = L$이다. (단, L은 실수이다.)

[문제 3-1] 일반항이 $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 정적분 $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{a_n}}^{a_n} \frac{1}{nx(1+x^n)}dx$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} I_n$을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-2] 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y+1)+1$이다.

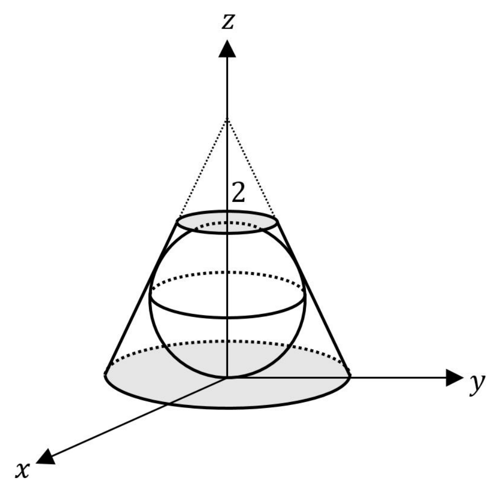
(나) 0에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)+1| \le x^2$이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f'(k)$를 구하시오. **[15점]**

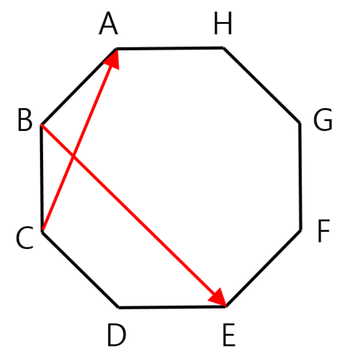
[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 중심이 점 (a,b,c)이고 반지름이 r인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이고 그 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이다. 밑면의 반지름이 s이고 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi s^2 h$이다.
- 벡터 $\vec{a}$의 크기는 $|\vec{a}|$로 나타내고 $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$를 만족한다.
- 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 수직일 조건은 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$이다.

[문제 4-1] 다음 그림과 같이 xy평면에 넓이가 A인 밑면을 가지고 양의 z축에 꼭짓점을 가지는 원뿔이 방정식 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$로 정의된 구 S에 외접한다. 점 $(0,0,2)$를 지나고 xy평면에 평행한 평면으로 이 원뿔을 잘라 얻은 원뿔대의 부피가 구 S의 부피의 3배이고 잘린 단면의 넓이를 B라 할 때, $\frac{A}{B}$를 구하시오. **[15점]**



[문제 4-2] 정팔각형 ABCDEFGH에서 $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=2$일 때, 이 정팔각형의 넓이를 구하시오. **[15점]**



- 끝 -