2026학년도 한국공학대학교

모의논술고사 답안

[문제1] [10점]

두 직선 $y=(\log_3 2)x$, $y=(\log_4 a)x$가 서로 수직이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

[예시 답안]

두 직선 $y=(\log_3 2)x$, $y=(\log_4 a)x$가 서로 수직이므로 $\log_3 2\times\log_4 a=-1$

$\log_3 2\times\log_{2^2} a=-1$, $\log_3 2\times\left(\frac{1}{2}\log_2 a\right)=-1$

$\log_3 2\times\log_2 a=-2$, $\log_3 a=-2$

따라서 $a=3^{-2}=\frac{1}{9}$

[문제2] [10점]

$0 \le \theta < 2\pi$ 일 때, 부등식

$$\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 3\cos\theta - 1 \ge 0$$

을 만족시키는 모든 θ의 값의 범위가 $\alpha \le \theta \le \beta$ 이다. $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{6}\right)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

[예시 답안]

$\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 3\cos\theta - 1 \ge 0$, $\cos^2\theta + 3(1-\cos^2\theta) - 3\cos\theta - 1 \ge 0$

$-2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 \ge 0$, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 \le 0$, $(\cos\theta+2)(2\cos\theta - 1) \le 0$

이때 $\cos\theta + 2 \ge 0$ 이므로 $2\cos\theta - 1 \le 0$, $\cos\theta \le \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}$, $\alpha + \beta = 2\pi$

따라서 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[문제3] [10점]

함수 $f(x)=-3x^2+3$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $0<t<1$이고 O는 원점이다.)

[예시 답안]

$f(x)=-3x^2+3$에서 $f'(x)=-6x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이므로

$$y-\left(-3t^2+3\right)=-6t(x-t)$$

접선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는 $\left(0,\, 3t^2+3\right)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{1}{2}t\left(3t^2+3\right)=\frac{3}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

이고 $g'(t)=\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}$ 이므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{8}$

[문제4] [10점]

시각 $t=0$에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=kt^2+t$이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 9일 때, 시각 $t=4$에서 점 P의 가속도를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, k는 상수이다.)

[예시 답안]

점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는 9이므로

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (kt^2+t)dt=\left[\frac{k}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=9k+\frac{9}{2}$$

$9k+\frac{9}{2}=9$에서 $k=\frac{1}{2}$이고 $v(t)=\frac{1}{2}t^2+t$

시각 t에서 점 P의 가속도 $a(t)$는 $a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=t+1$이므로 $a(4)=5$

[문제5] [10점]

함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

[예시 답안]

$f(x)=x^3-2x^2+2x$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=16-24=-8<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 좌표와 같다.

$$x^3-2x^2+2x=x,\ x(x-1)^2=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다. 따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2\int_0^1 |f(x)-x|\,dx &= 2\int_0^1 \left|(x^3-2x^2+2x)-x\right|dx \\ &= 2\int_0^1 \left|x^3-2x^2+x\right|dx \\ &= 2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx \\ &= 2\times\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

[문제6] [15점]

다항함수 $f(x)=x^3+2ax+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{5}{2}$

(나) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=3$

함수 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구하고 그 과정을 서술하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

[예시 답안]

조건 (가) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{5}{2}$ 에서 $f'(1)=\frac{5}{2}$

$f'(x)=3x^2+2a$ 에서 $f'(1)=3+2a=\frac{5}{2}$, $a=-\frac{1}{4}$ 이므로 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x+b$

조건 (나) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=3$ 에서 $\displaystyle\int_0^2\left(x^3-\frac{1}{2}x+b\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^2+bx\right]_0^2=3$

$4-1+2b=3$, $b=0$ 이므로 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$.

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 에서 $g'(x)=f(x)$. $g'(x)=0$ 즉, $f(x)=0$ 에서

$$x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{또는}\ x=0\ \text{또는}\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(t^3-\frac{1}{2}t\right)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{4}t^2\right]_0^x=\frac{1}{4}(x^4-x^2)$$

따라서 함수 $g(x)$는

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 극솟값 $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{16}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 극솟값 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{16}$

을 갖고, $x=0$ 에서 극댓값 $g(0)=0$을 갖는다.