2025학년도 한국공학대학교

모의 논술고사 답안

문제1 (10점) 함수 $f(x) = \log_2(2\sin x + a) + b$는 $0 \le x < \pi$ 구간에서 최댓값 5, 최솟값 4를 갖는다. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

[예시 답안]

함수 $f(x) = \log_2(2\sin x + a) + b$는 $2\sin x + a$값이 증가하면 y 값도 증가하므로

$0 \le x < \pi$ 구간에 $2\sin x + a$의 값은 $x = 0$에서 최솟값, $x = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

$x = 0$, $\log_2 a + b = 4$,

$x = \frac{\pi}{2}$, $\log_2(2 + a) + b = 5$ 따라서 $a = 2, b = 3$이고

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \log_2(1 + 2) + 3 = 3 + \log_2 3$$이다.

문제2 (10점) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지 합을 S_n이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $S_n = \dfrac{n}{3n+1}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1-16a_k^2}{a_k}$를 구하시오.

[예시 답안]

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1-16a_k^2}{a_k} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k} - 16\sum_{k=1}^{5} a_k \ ,$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}, \quad a_1 = \frac{1}{4 \cdot 1} = S_1$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1-16a_k^2}{a_k} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k} - 16\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5} (9k^2 - 3k - 2) - 16S_5$$

$$= \left\{9 \times \frac{5 \cdot 6 \cdot (10+1)}{6} - 3 \times \frac{5 \cdot 6}{2} - 2 \cdot 5\right\} - 5 = 435$$

문제3 (10점) 함수 $f(x)=1+\sin 3x$라 할 때, $0 \le x \le \pi$ 에서 방정식

$$2f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-f(x-\pi)=0$$을

만족시키는 해를 모두 구하시오.

[예시 답안]

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)=1+\cos 3x$$
$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\cos 3x$$
$$f(x-\pi)=1+\sin(3x-3\pi)=1-\sin 3x$$

$$2f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-f(x-\pi)=2(1-\cos^2 3x)-1+\sin 3x=0$$

$$\therefore \quad 2\sin^2 3x+\sin 3x-1=(2\sin 3x-1)(\sin 3x+1)=0$$

$\sin 3x=-1$ 에서 $3x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$,

$\sin 3x=\frac{1}{2}$에서 $3x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{17}{18}\pi$

문제4 (10점) 자연수 n에 대하여 수열 $A_n = \int_{n-1}^{n} -\frac{1}{n}(x-n+1)(x-n)dx$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{A_n}$ 값을 구하시오.

[예시 답안]

$$A_1 = \int_0^1 -x(x-1)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$A_n = \int_{n-1}^{n} -\frac{1}{n}(x-n+1)(x-n)dx = \int_0^1 -\frac{1}{n}x(x-1)dx = \frac{1}{n} \times \frac{1}{6}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{A_n} = 6(1+2+\cdots+10) = 6 \times 55 = 330$$

문제5 (10점) 다항함수 $g(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점$(1, g(1))$에서의 접선 방정식은 $y=2x+2$이다. 함수 $f(x)=(x^2+1)g(x)$일 때,

극한값 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$의 값과 미분 계수 $f'(1)$값을

각각 구하시오.

[예시 답안]

$y=g(x)$의 점$(1, g(1))$에서 접선 방정식이 $y=2x+2$ 이므로 $g(1)=4$, $g'(1)=2$이다.

함수 $f(x)$의 한 원시함수를 $F(x)$ 라 하면

$\int_1^x f(t)\,dt = F(x)-F(1)$ 에서

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=f(1)\text{이고}$$
$$f(1)=2g(1)=2\times4=8$$

$f'(x)=2x\,g(x)+(x^2+1)g'(x)$이므로 $f'(1)=2g(1)+2g'(1)=12$ 이다.

문제 6 (15점) 두 일차함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(x-1)^2}=-2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=1 \text{ 일 때,}$$

$\{f(x)g(x)\}'$을 구하시오.

[예시 답안]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x-1}=-2 \Rightarrow f(1)g(1)=0$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=1 \Rightarrow f(1)+g(1)=0$

$$\therefore\ f(1)=g(1)=0$$

따라서 $f(x)=a(x-1),\ g(x)=b(x-1)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{ab(x-1)^2}{(x-1)^2}=-2$, $\qquad ab=-2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)+b(x-1)}{x-1}=1,\qquad a+b=1$

$x^2-(a+b)x+ab=x^2-x-2=0$의 근 $a=2, b=-1$ 또는 $a=-1, b=2$

$$\therefore f(x)g(x)=-2(x-1)^2$$

$\{f(x)g(x)\}'=(-2(x-1)^2)'=-2^2(x-1)$