문제1 [10점]

$\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여

$$\sin A = \cos B, \quad \overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{3}$$

이다. 다음은 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하는 과정이다. (1) ~ (4)에 알맞은 수를 구하시오.

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$인 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}$ …… ㉠ $\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$이고 $\sin A = \cos B$이므로 $\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2} + \angle \mathrm{B}$ …… ㉡ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로 $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi$ …… ㉢ ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\angle \mathrm{A} = \boxed{\quad (1) \quad}$, $\angle \mathrm{B} = \boxed{\quad (2) \quad}$ 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 $R = \boxed{\quad (3) \quad}$이므로 외접원의 넓이는 $\boxed{\quad (4) \quad}$이다.

(예시답안)

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$인 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}$ …… ㉠

$\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$이고 $\sin A = \cos B$이므로 $\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2} + \angle \mathrm{B}$ …… ㉡

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로 $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\angle \mathrm{B} = \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2} + \angle \mathrm{B} = \dfrac{2}{3}\pi$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때 사인법칙을 이용하면

$$2R = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

따라서 $R = 2\sqrt{3}$이므로 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = 12\pi$이다.

(1) $\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $\dfrac{\pi}{6}$ (3) $2\sqrt{3}$ (4) 12π

문제2 [10점]

좌표평면 위의 두 점 $(0,0)$, $\left(\sqrt[3]{4}\,,\,\sqrt[6]{2}\right)$를 지나는 직선이 직선 $ax+2y=1$과 서로 수직일 때, a^2의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a는 상수이다.)

(예시답안)

두 점 $(0,0)$과 $(\sqrt[3]{4}\,,\sqrt[6]{2})$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{4}}=2^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고 직선 $ax+2y=1$의 기울기는 $-\frac{a}{2}$이다. 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\frac{a}{2}\right)=-1,\ \ a=2\sqrt{2}$$

따라서 $a^2=8$

문제3 [10점]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+2}-S_n=10n+9$$

가 성립할 때, a_3의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}=a+(n+1)d+a+nd=2dn+2a+d=10n+9$$

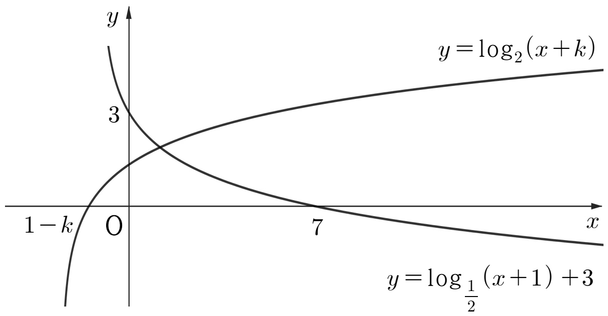
에서 $2d=10$, $2a+d=9$이므로 $d=5$, $a=2$

따라서 $a_3=2+2\times 5=12$

문제4 [10점]

두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+3$, $y=\log_2(x+k)$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\log_4(\alpha+\beta)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)



함수 $y=\log_2(x+k)$ 의 그래프가

점 $(7,0)$ 을 지날 때 $k=-6$

함수 $y=\log_2(x+k)$ 의 그래프가

점 $(0,3)$ 을 지날 때 $k=8$

이므로 두 함수의 그래프가

제1사분면에서 만나도록 하는

모든 k의 값의 범위는

$$-6<k<8$$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=8$ 이므로 $\log_4(\alpha+\beta)=\log_4 2=\frac{1}{2}$

문제5 [10점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-4}{x-2} = 2f(2)$
(나) $f(x)g(x) = x^4 - x^2$

$f'(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

조건 (가)에서

$\lim_{x \to 2}(x-2)=0$ 이므로 $\lim_{x \to 2}\{g(x)-4\}=0$, $g(2)-4=0$에서 $g(2)=4$ …… ㉠

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)$$

이므로 $g'(2)=2f(2)$ …… ㉡

조건 (나)에서

(i) 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)g(2)=12$

에서 ㉠에 의하여 $f(2)=3$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $g'(2)=6$ …… ㉣

(ii) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3-2x$$

에서 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=28$$

이므로 ㉠, ㉢, ㉣에 의하여 $f'(2)=\frac{5}{2}$

문제6 [10점]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{b^2}{x^2+bx+1} & (x \neq 0) \\ \\ \dfrac{a^2}{4} & (x=0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, a와 b의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

(i) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{b^2}{x^2+bx+1}=b^2$ 이고 $f(0)=\dfrac{a^2}{4}$ 이므로 $b^2=\dfrac{a^2}{4}$ …… ㉠

㉠에서 $a=2b$ 또는 $a=-2b$

a, b가 모두 자연수이므로 $a=2b$ …… ㉡

(ii) 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{b^2}{x^2+bx+1}$ $(x\neq 0)$이라 하면 함수 $g(x)$가 $x\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이어야 하므로 $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2+bx+1\neq 0$이어야 한다.

$x=0$이면 $x^2+bx+1=1\neq 0$이므로 이차방정식 $x^2+bx+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$$D=b^2-4=(b+2)(b-2)<0$$

에서 $-2<b<2$

따라서 자연수 b의 값은 $b=1$이고 ㉡에 의하여 $a=2$

문제7 [10점]

실수 $k\,(k>1)$에 대하여 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=kx$가 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y=kx$가 직선 $x=2k$와 만나는 점을 Q라 하자. 곡선 $y=x^2-x$와 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $x=2k$ 및 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A-B=\dfrac{8}{3}$일 때, k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, O는 원점이다.)

(예시답안)

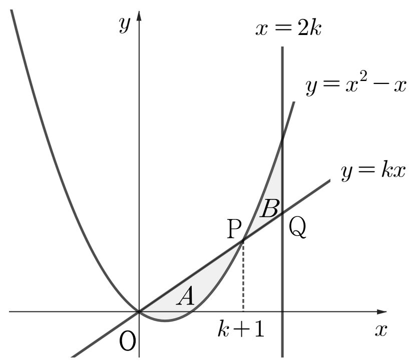
$k>1$이므로 좌표평면 위에 곡선 $y=x^2-x$와 두 직선 $y=kx$, $x=2k$을 나타내면 그림과 같다.

곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=kx$가 만나는 점 P의 x좌표는 $k+1$이고 $A-B=\dfrac{8}{3}$이므로

$$\int_0^{k+1}\{kx-(x^2-x)\}dx-\int_{k+1}^{2k}(x^2-x-kx)\,dx=\frac{8}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에서 $\displaystyle\int_0^{2k}\{x^2-(k+1)x\}dx=-\frac{8}{3}$

$$\int_0^{2k}\{x^2-(k+1)x\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{k+1}{2}x^2\right]_0^{2k}$$
$$=\frac{8}{3}k^3-2(k+1)k^2$$
$$=\frac{2}{3}k^3-2k^2=-\frac{8}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$



㉡에서 $k^3-3k^2+4=(k+1)(k-2)^2=0$이므로 $k=2$

문제8 [15점]

시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3+at^2+bt$$

일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $v(1)=0$
(나) $\displaystyle\int_0^3 \lvert v(t) \rvert\, dt=\frac{23}{3}$

시각 $t=6$에서의 점 P의 속도를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a\leq -2$)

(예시답안)

$x(t)=\dfrac{1}{3}t^3+at^2+bt$에서 $v(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)=t^2+2at+b$

조건 (가)에서 $v(1)=1+2a+b=0$이므로 $b=-2a-1$ …… ㉠

$$v(t)=t^2+2at+b=t^2+2at-(2a+1)=(t-1)(t+2a+1)$$

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=-2a-1$ 이때 $a\leq -2$이므로 $-2a-1\geq 3$

한편 $0\leq t\leq 1$에서 $v(t)\geq 0$, $1\leq t\leq -2a-1$에서 $v(t)\leq 0$이고

조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^3 |v(t)|dt=\frac{23}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 \lvert v(t)\rvert\, dt &= \int_0^1 v(t)\,dt-\int_1^3 v(t)\,dt\\ &=x(1)-x(0)-\{x(3)-x(1)\}\\ &=2\{x(1)\}-x(3)\\ &=2\left(\frac{1}{3}+a+b\right)-(9+9a+3b)=\frac{23}{3}\end{aligned}$$

에서 $7a+b=-16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$, $b=5$이므로

$$v(t)=t^2+2at+b=t^2-6t+5$$

따라서 시각 $t=6$에서의 점 P의 속도는 $v(6)=36-36+5=5$

문제9 [15점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{6}x^4 + ax^3 + bx^2$ 이다.
(나) $\lvert f'(-1) \rvert + \lvert f'(2) \rvert = 0$

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \frac{1}{4}\lvert 3f(x) - 24x - 4 \rvert$$

라 하자. 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

조건 (가)에서

$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{6}x^4 + ax^3 + bx^2$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3ax^2 + 2bx$

조건 (나)에서

$\lvert f'(-1) \rvert + \lvert f'(2) \rvert = 0$ 이므로 $f'(-1) = 0$ 이고 $f'(2) = 0$

$f'(x) = 2x^2 + 6ax + 2b$ 이므로

$f'(-1) = 2 - 6a + 2b = 0$ 에서 $3a - b = 1$ …… ㉠

$f'(2) = 8 + 12a + 2b = 0$ 에서 $6a + b = -4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -\frac{1}{3}$, $b = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$

$$g(x) = \frac{1}{4}\lvert 3f(x) - 24x - 4 \rvert = \frac{1}{4}\lvert 2x^3 - 3x^2 - 36x - 4 \rvert$$

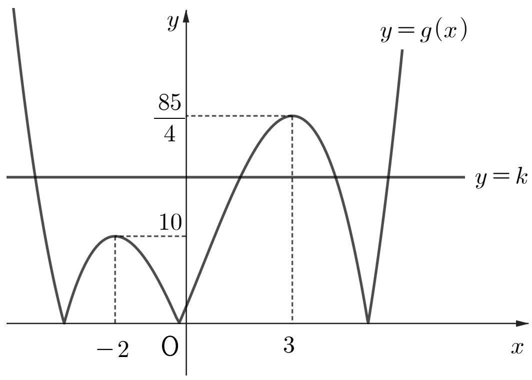
함수 $h(x)$를 $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 4$라 하면 $h'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ 이고

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-2)=40$, $h(3)=-85$ 이고 $g(x)=\frac{1}{4}|h(x)|$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 k 의 값의 범위가 $10<k<\frac{85}{4}$ 이므로 자연수 k 의 개수는 11 이다.