문제1 [10점]

함수 $f(x)=a\sin bx+c$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 최댓값은 7, 최솟값은 3이다. 다음은 함수 $f(x)$에 대하여 세 상수 a, b, c의 값을 구하는 과정이다. ⑴ ~ ⑸에 알맞은 식 또는 수를 구하시오.
(단, $a>0$, $b>0$)

> 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $b=$ $\boxed{(1)}$ 이다.
> 함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값과 최솟값을 a와 c에 대한 식으로 나타내면
> 최댓값은 $\boxed{(2)}$ 이고 최솟값은 $\boxed{(3)}$ 이므로
> $a=$ $\boxed{(4)}$, $c=$ $\boxed{(5)}$ 이다.

(예시답안)

함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$, $b=4$이다.
함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값과 최솟값을 a와 c에 대한 식으로 나타내면 $a>0$이므로
최댓값은 $a+c$이고 최솟값은 $-a+c$이다. 따라서 $a+c=7$, $-a+c=3$에서 $a=2$, $c=5$이다.

⑴ 4 ⑵ $a+c$ ⑶ $-a+c$ ⑷ 2 ⑸ 5

문제2 [10점]

1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여

$$2\log_a b : \log_a b + 1 = 1 : \log_a b$$

일 때, $\log_a b + \log_b a$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$2\log_a b : \log_a b + 1 = 1 : \log_a b$에서

$$2(\log_a b)^2 = \log_a b + 1,\ 2(\log_a b)^2 - \log_a b - 1 = 0,\ (2\log_a b + 1)(\log_a b - 1) = 0$$

$\log_a b = -\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a b = 1$이고 $a \neq b$이므로 $\log_a b = -\frac{1}{2}$ 따라서

$$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) = -\frac{5}{2}$$

문제3 [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{5a_2}{a_3+a_4}=16$일 때, $\frac{a_3}{a_5}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 수열의 모든 항이 양수이므로 $r>0$

$$\frac{5a_2}{a_3+a_4}=\frac{5ar}{ar^2+ar^3}=\frac{5}{r+r^2}=16$$

이므로 $16r^2+16r-5=0$, $(4r-1)(4r+5)=0$, $r=\frac{1}{4}$ 또는 $r=-\frac{5}{4}$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{4}$ 따라서 $\frac{a_3}{a_5}=\frac{1}{r^2}=\left(\frac{1}{r}\right)^2=4^2=16$

문제4 [10점]

두 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-1$, $y=2^x+k$의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\log_{\sqrt{2}}(\beta-\alpha)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

함수 $y=2^x+k$의 그래프가

점 $(1,0)$을 지날 때 $k=-2$

함수 $y=2^x+k$의 그래프가

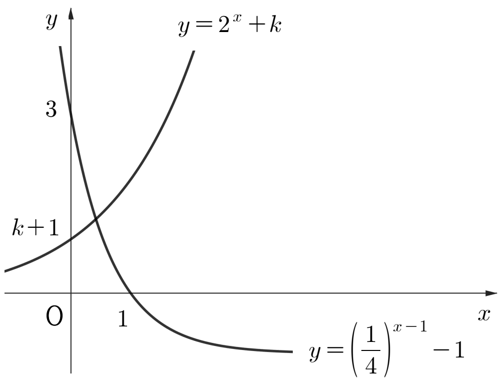
점 $(0,3)$을 지날 때 $k=2$

이므로 두 함수의 그래프가

제1사분면에서 만나도록 하는

모든 k의 값의 범위는

$$-2<k<2$$



따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로 $\log_{\sqrt{2}}(\beta-\alpha)=2\log_2 4=4$

문제5 [10점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=0$ (나) $f(x)g(x)=x^3-4x^2+x+6$

$f'(1)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $f(1)>0$)

(예시답안)

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$, $f(1)-g(1)=0$에서 $f(1)=g(1)$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-g(x)+g(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\\&=f'(1)-g'(1)=0\end{aligned}$$

에서 $f'(1)=g'(1)$ …… ㉡

조건 (나)에서

(ⅰ) 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)g(1)=4$

㉠에 의하여 $\{f(1)\}^2=4$이고 $f(1)>0$이므로 $f(1)=2$ …… ㉢

(ⅱ) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2-8x+1$$

에서 양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=-4$

㉠, ㉡에 의하여 $2f'(1)f(1)=-4$이고 ㉢에 의하여 $f'(1)=-1$

문제6 [10점]

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x-a & (x<1) \\ 2a & (x=1) \\ bx-3 & (x>1) \end{cases}$$

이다. 함수 $\{f(x)\}^2$이 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(a-b)+f(a+b)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

함수

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (-x-a)^2 & (x<1) \\ (2a)^2 & (x=1) \\ (bx-3)^2 & (x>1) \end{cases}$$

이 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2=\lim_{x\to 1+}\{f(x)\}^2$$

이다.

$$\lim_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 1-}(-x-a)^2=(1+a)^2 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

$$\{f(1)\}^2=4a^2 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

$$\lim_{x\to 1+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 1+}(bx-3)^2=(b-3)^2 \quad \cdots\cdots \ ㉢$$

㉠, ㉡에 의하여 $(1+a)^2=4a^2$, $3a^2-2a-1=(a-1)(3a+1)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$

a는 양수이므로 $a=1$

㉡, ㉢에 의하여 $4a^2=(b-3)^2$, $a=1$을 대입하면 $b-3=2$ 또는 $b-3=-2$에서

$b=5$ 또는 $b=1$

$a\neq b$이므로 $b=5$ 따라서 $a=1$, $b=5$

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x<1) \\ 2 & (x=1) \\ 5x-3 & (x>1) \end{cases}$$

이므로 $f(a-b)+f(a+b)=f(-4)+f(6)=3+27=30$

문제7 [10점]

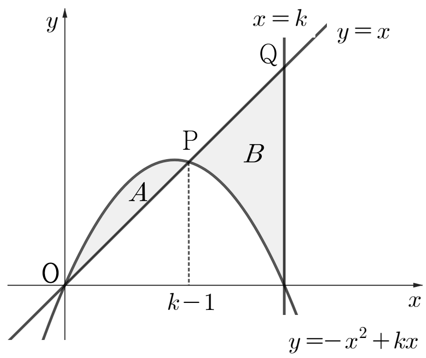
실수 $k\,(k>1)$에 대하여 곡선 $y=-x^2+kx$와 직선 $y=x$가 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y=x$가 직선 $x=k$와 만나는 점을 Q라 하자. 곡선 $y=-x^2+kx$와 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 곡선 $y=-x^2+kx$와 직선 $x=k$ 및 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\dfrac{2}{3}$일 때, k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, O는 원점이다.)

(예시답안)

좌표평면 위에 곡선 $y=-x^2+kx$와 두 직선 $y=x$, $x=k$를 나타내면 그림과 같다.

곡선 $y=-x^2+kx$와 직선 $y=x$가 만나는 점 P의 x좌표는 $k-1$이고 $B-A=\dfrac{2}{3}$이므로

$$\int_{k-1}^{k}\{x-(-x^2+kx)\}dx-\int_{0}^{k-1}(-x^2+kx-x)dx=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$



㉠에서 $\displaystyle\int_{0}^{k}(x^2-kx+x)dx=\frac{2}{3}$

$$\int_{0}^{k}(x^2-kx+x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1-k}{2}x^2\right]_0^k$$

$$=\frac{k^3}{3}+\frac{1-k}{2}k^2$$

$$=-\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $k^3-3k^2+4=(k+1)(k-2)^2=0$이므로 $k=2$

문제8 [15점]

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 두 상수 $a, b\ (a > 4b > 0)$에 대하여

$$v(t)=6t^2-(a+8b)t+(a+2b)b$$

일 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 시각 $t=t_1$과 $t=t_2$에서 운동 방향을 바꾸고 $t_2-t_1=\frac{1}{3}$이다.
(나) 시각 $t=0$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

시각 $t=2$에서의 점 P의 위치를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도가 0이므로

$$v(t)=6t^2-(a+8b)t+(a+2b)b=(t-b)(6t-a-2b)=0$$

에서 $t=b$ 또는 $t=\frac{a+2b}{6}$, $a>4b$이므로 $\frac{a+2b}{6}>b$

조건 (가)에서 $t_2-t_1=\frac{a+2b}{6}-b=\frac{a-4b}{6}=\frac{1}{3}$이므로 $a-4b=2$ …… ㉠

한편 $0 \le t \le b$에서 $v(t) \ge 0$이고 조건 (나)에서 $\int_0^b |v(t)|\,dt=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^b |v(t)|\,dt&=\int_0^b v(t)\,dt\\&=\int_0^b \left\{6t^2-(a+8b)t+(a+2b)b\right\}dt\\&=\left[2t^3-\frac{1}{2}(a+8b)t^2+(a+2b)bt\right]_0^b\\&=2b^3-\frac{b^2}{2}(a+8b)+(a+2b)b^2\\&=\frac{1}{2}ab^2=3 \quad \cdots\cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a=6, b=1$ 따라서 $v(t)=6t^2-14t+8$

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$x(2)=x(0)+\int_0^2 v(t)\,dt=0+\int_0^2 (6t^2-14t+8)\,dt=\left[2t^3-7t^2+8t\right]_0^2=4$$

문제9 [15점]

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 2x - 2$$

를 만족시킨다. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 삼각형 AOB의 넓이를 $g(k)$라 하자. $g(k)$가 최대일 때, k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

(예시답안)

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 2x - 2$$

에서

(i) 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=2$

(ii) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = f'(x) - 2x^2 + 8x - 2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

에서 $f(x)$의 최고차항은 $-2x^2$이고 $f(0)=2$이므로 $f(x)=-2x^2+ax+2$라 하자.

㉠에 의하여 $-2x^2+ax+2=-4x+a-2x^2+8x-2$

에서 $a=4$이므로 $f(x)=-2x^2+4x+2$

곡선 $y=-2x^2+4x+2$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $-2x^2+4x+2=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

방정식 $2x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=16-8(k-2)>0,\ k<4$$

k는 양수이므로 $0<k<4$

$2x^2-4x+k-2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{k-2}{2}$

$$\overline{\mathrm{AB}} = |\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{4-2(k-2)} = \sqrt{8-2k}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이 $g(k)$는

$$g(k) = \frac{1}{2}\times\sqrt{8-2k}\times k = \frac{1}{2}\sqrt{8k^2-2k^3}$$

$0<k<4$에서 함수 $h(k)$를 $h(k)=8k^2-2k^3$이라 하면 $h(k)$가 최대일 때 $g(k)$도 최대이다.

$$h'(k) = 16k-6k^2 = 2k(8-3k)$$

$h'(k)=0$ 에서 $k=0$ 또는 $k=\frac{8}{3}$

함수 $h(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$h'(k)$		$+$	0	$-$	
$h(k)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $h(k)$ 가 $k=\frac{8}{3}$ 에서 최대이므로 $g(k)$ 도 $k=\frac{8}{3}$ 일 때 최대이다.