2024학년도 한국공학대학교
수시모집 모의논술고사

(문제 답안)

한국공학대학교
TECH UNIVERSITY OF KOREA

[문제1 답안]

[1-1] [10점]

다음은 두 실수 x, y에 대하여

$$2^x = 5^{3y} = 10$$

일 때, $\log_3\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술한 것이다. (가)~(마)에 알맞은 값을 구하시오.

> $2^x = 10$에서 $10^{\frac{3}{x}} = \boxed{(가)}$이고 $5^{3y} = 10$에서 $10^{\frac{1}{y}} = \boxed{(나)}$이다.
>
> $10^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}} = \boxed{(다)}$이므로 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y} = \boxed{(라)}$
>
> 따라서 $\log_3\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right) = \boxed{(마)}$이다.

(예시 답안)

$2^x = 10$에서 $10^{\frac{3}{x}} = 2^3$이므로 (가)는 2^3 또는 8

$5^{3y} = 10$에서 $10^{\frac{1}{y}} = 5^3$이므로 (나)는 5^3 또는 125

$10^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}} = 2^3 \times 5^3 = 10^3$이므로 (다)는 10^3 또는 1000 이고 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y} = 3$이므로 (라)는 3

따라서 $\log_3\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right) = \log_3 3 = 1$이므로 (마)는 1이다.

(가) 8　(나) 125　(다) 1000　(라) 3　(마) 1

[1-2] [10점]

지수함수 $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$이 $2f(2) = 7a - 3$을 만족시킨다. 어떤 양수 b에 대하여 $f(b) > 1$일 때, $f(2)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a는 상수이다.)

(예시 답안)

$2f(2) = 7a - 3$에서 $2a^2 = 7a - 3$, $2a^2 - 7a + 3 = 0$, $(2a-1)(a-3) = 0$, $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 3$.

한편, $b > 0$일 때 $f(b) > 1$이므로 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $a = 3$. 이때 $f(x) = 3^x$이므로 $f(2) = 9$

[1-3] [10점]

$0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = -2\cos^2 x + 2\sin x + 1$의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

$y = -2\cos^2 x + 2\sin x + 1 = -2(1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 1 = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$

에서 $t = \sin x$라 하면 $-1 \le t \le 1$. 이때

$$y = 2t^2 + 2t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

이므로 $t = -\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{3}{2}$, $t = 1$일 때 최댓값은 3이다.

[문제2 답안]

[2-1] [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_3 = 2$일 때, 부등식 $a_n > 40$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$$a_2 + a_3 = \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r^2 = \frac{1}{3}(r + r^2)$$

에서

$$\frac{1}{3}(r+r^2) = 2,\ r^2 + r - 6 = 0,\ (r+3)(r-2) = 0,\ r = -3 \text{ 또는 } r = 2$$

$r > 0$이므로 $r = 2$. 따라서 $a_n = \frac{1}{3} \times 2^{n-1}$.

$\frac{1}{3} \times 2^{n-1} > 40$에서 $2^{n-1} > 120$. $2^6 = 64$, $2^7 = 128$이므로 $2^{n-1} > 120$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $n - 1 = 7$에서 $n = 8$.

[2-2] [10점]

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} = 2x^2 + 18$$

을 만족시킨다. 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 양수일 때, 함수 $f(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$이다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} = 2 \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = 2f'(x)$$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=2x^2+18$$

에서 $f'(0)\times 2f'(x)=2x^2+18$, $f'(0)\times f'(x)=x^2+9$

양변에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)\times f'(0)=9$에서 $f'(0)>0$이므로 $f'(0)=3$이고 $f'(x)=\dfrac{x^2}{3}+3$

이때 $f(x)=\dfrac{x^3}{9}+3x+C$ 이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$, 따라서 $f(x)=\dfrac{x^3}{9}+3x$

[2-3] [10점]

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\quad v_2(t)=4t$$

이고, 출발한 후 두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 만난다. 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리를 s라 할 때, s를 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a>0$)

(예시 답안)

점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는

$$\int_0^a (3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^a=a^3-3a^2$$

점 Q의 시각 $t=a$에서의 위치는

$$\int_0^a 4t\,dt=\left[2t^2\right]_0^a=2a^2$$

두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 만나므로

$$a^3-3a^2=2a^2,\ a^2(a-5)=0,\ a>0\text{이므로 } a=5$$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^5|v_1(t)|dt=\int_0^5|3t^2-6t|dt$$

$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5$$

$$=4+54=58$$

[문제3 답안]

함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어졌을 때, 각 물음에 답하시오.

$$f(x)=\begin{cases} -2x-5 & (x<a) \\ bx^2-4 & (x \geq a) \end{cases}$$ (단, a, b는 상수이다.)

[3-1] [10점]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a와 b의 값과 함수 $f(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

에서 $-2a-5=a^2b-4$. 또한 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

을 만족시켜야 한다.

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\{-2(a+h)-5\}-\{-2a-5\}}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-2h}{h} = -2$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\{b(a+h)^2-4\}-\{ba^2-4\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{2abh+bh^2}{h} = \lim_{h \to 0+} (2ab+bh) = 2ab$$

에서 $-2=2ab$, $ab=-1$.

$-2a-5=a^2b-4=a(ab)-4$ 에서 $-2a-5=-a-4$, $a=-1$ 이고 $ab=-1$에서 $b=1$

$$f(x)=\begin{cases} -2x-5 & (x< -1) \\ x^2-4 & (x \geq -1) \end{cases}$$