[문제 1]

[1-1] [10점]

다음은 $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$2x^2+(4\cos\theta)x+3-3\sin\theta=0$$

이 중근을 갖도록 하는 모든 θ의 값을 구하는 과정이다.

이차방정식 $2x^2+(4\cos\theta)x+3-3\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D=(4\cos\theta)^2-8(3-3\sin\theta)=0$ 이어야 한다. 즉, $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$ 이고, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 $2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$ 이다. 따라서 ((가))$(\sin\theta-1)=0$ 이므로 $\sin\theta=$ (나) 또는 $\sin\theta=1$ $0 \le \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta=$ (나) 일 때, $\theta=$ (다) 또는 $\theta=$ (라) 이고 $\sin\theta=1$일 때, $\theta=$ (마) 이다.

위의 과정에서 (가) ~ (마)에 알맞은 식 또는 값을 구하시오.

(예시답안)

이차방정식 $2x^2+(4\cos\theta)x+3-3\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D=(4\cos\theta)^2-8(3-3\sin\theta)=0$이어야 한다.

즉, $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$이고 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 $2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

이다. 따라서

$$(\boxed{2\sin\theta-1})(\sin\theta-1)=0$$

이므로

$$\sin\theta=\boxed{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } \sin\theta=1$$

$0 \le \theta < 2\pi$에서

$\sin\theta = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\dfrac{\pi}{6}}$ 또는 $\theta = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$ 이고 $\left(\theta = \dfrac{5\pi}{6}\right.$ 또는 $\left.\theta = \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin\theta = 1$ 일 때, $\theta = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$ 이다.

(가) $2\sin\theta - 1$ (또는 $-2\sin\theta + 1$) (나) $\dfrac{1}{2}$ (다) $\dfrac{\pi}{6}$ (라) $\dfrac{5\pi}{6}$ (마) $\dfrac{\pi}{2}$

또는

(가) $2\sin\theta - 1$ (또는 $-2\sin\theta + 1$) (나) $\dfrac{1}{2}$ (다) $\dfrac{5\pi}{6}$ (라) $\dfrac{\pi}{6}$ (마) $\dfrac{\pi}{2}$

[1-2] [10점]

두 곡선

$$y=\log_3(-x), \quad y=\log_{\frac{1}{3}}x+a$$

가 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=18$일 때, 상수 a의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$\log_3(-x)=2$에서 $x=-9$이므로 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(-9, 2)$

$\log_{\frac{1}{3}}x+a=2$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x=2-a$, $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-a}=3^{a-2}$

이므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(3^{a-2}, 2\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=18$이므로 $3^{a-2}+9=18$, $3^{a-2}=9=3^2$ 에서 $a=4$

[1-3] [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2^{a_{n+2}} = 16^{a_n}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.
$S_8 - S_4 = 160$일 때, a_5의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$2^{a_{n+2}} = 16^{a_n}$에서 $2^{a_{n+2}} = \left(2^4\right)^{a_n} = 2^{4a_n}$, $a_{n+2} = 4a_n$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a_1 = a$, 공비를 r라 하면

$a_{n+2} = 4a_n$에서 $ar^{n+1} = 4ar^{n-1}$, $r^2 = 4$

모든 항이 양수이므로 $r = 2$

$S_8 - S_4 = \dfrac{a\left(2^8 - 1\right)}{2-1} - \dfrac{a\left(2^4 - 1\right)}{2-1} = a\left(2^8 - 2^4\right) = 160$에서 $a = \dfrac{2}{3}$

따라서 $a_5 = ar^4 = \dfrac{2}{3} \times 2^4 = \dfrac{32}{3}$

[문제 2]

[2-1] [10점]

서로 다른 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-3x+4$가

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(b)-f(b-3h)}{h}=9$$

를 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a+b, f(a+b))$에서의 접선의 방정식을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3=3f'(a)=9$에서 $f'(a)=3$ …… ㉠

$\lim_{h\to0}\frac{f(b)-f(b-3h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(b-3h)-f(b)}{-3h}\times3=3f'(b)=9$에서 $f'(b)=3$ …… ㉡

$f'(x)=3x^2-3x-3$이므로

㉠, ㉡에 의해서 a, b는 이차방정식 $3x^2-3x-3=3$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 $3x^2-3x-6=0$에서 $3(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$이므로 $a+b=1$이다.

$$f(a+b)=f(1)=\frac{1}{2},\ f'(a+b)=f'(1)=-3$$

따라서 점 $(a+b,\ f(a+b))=\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-3(x-1),\ y=-3x+\frac{7}{2}$$

[2-2] [10점]

실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+1)x^2+3ax-\frac{9}{4}a^2+3a$$

의 극솟값을 $g(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a\to1+}\frac{g'(a)}{a-1}$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$f'(x)=3x^2-3(a+1)x+3a=3(x-1)(x-a)$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=a$

$a>1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 $f(a)=-\frac{a^3}{2}-\frac{3}{4}a^2+3a=g(a)$를 갖는다.

$g'(a)=-\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a+3$이므로

$$\lim_{a\to1+}\frac{g'(a)}{a-1}=\lim_{a\to1+}\frac{-\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a+3}{a-1}=\lim_{a\to1+}\frac{-\frac{3}{2}(a+2)(a-1)}{a-1}=-\frac{3}{2}\lim_{a\to1+}(a+2)=-\frac{9}{2}$$

[2-3] [10점]

두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직인다.
두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-11t+8,\quad v_2(t)=-3t^2+5t$$

이다. 점 P가 출발한 후 점 Q와 만날 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하고
그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

시각 t에서 점 P와 점 Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t+C_1,\ x_2(t)=-t^3+\frac{5}{2}t^2+C_2$$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

점 P와 점 Q가 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하였으므로

$$x_1(0)=C_1=0,\ x_2(0)=C_2=0$$

따라서 $x_1(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t,\ x_2(t)=-t^3+\frac{5}{2}t^2$

점 P가 출발한 후 점 Q와 만나는 시각 $t\ (t>0)$는

$$t^3-\frac{11}{2}t^2+8t=-t^3+\frac{5}{2}t^2,\quad 2t^3-8t^2+8t=2t(t-2)^2=0$$

에서 $t=2$이다.

$$v_1(t)=3t^2-11t+8=(t-1)(3t-8)=0$$

에서 $0\le t\le 1$일 때 $v_1(t)\ge 0$이고 $1\le t\le 2$일 때 $v_1(t)\le 0$

이므로 점 P가 출발한 후 점 Q와 만날 때까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned} s&=\int_0^2\left|v_1(t)\right|dt=\int_0^1\left|v_1(t)\right|dt+\int_1^2\left|v_1(t)\right|dt\\ &=\int_0^1(3t^2-11t+8)dt+\int_1^2(-3t^2+11t-8)dt\\ &=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^1+\left[-t^3+\frac{11}{2}t^2-8t\right]_1^2\\ &=\left(1-\frac{11}{2}+8\right)+\left\{(-8+22-16)-\left(-1+\frac{11}{2}-8\right)\right\}=5 \end{aligned}$$

[문제 3]

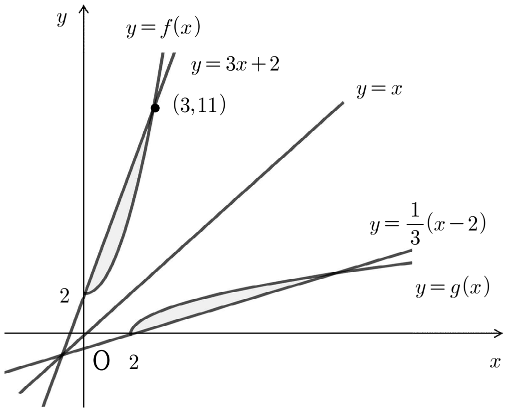
[3-1] [10점]

함수 $f(x)=x^2+2\ (x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}(x-2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

함수 $y=\frac{1}{3}(x-2)$의 역함수는 $y=3x+2$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}(x-2)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 (그림)과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는

$$x^2+2=3x+2,\ x(x-3)=0$$



(그림)

에서 $x=0$ 또는 $x=3$. 따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 \{(3x+2)-(x^2+2)\}dx = \int_0^3 (-x^2+3x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

[3-2] [15점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $$\int_0^x tf'(t)\,dt = 2F(x) + kx$$ 이다. (단, k는 상수이다.)
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 -3이다.

$f(1) \geq 0$일 때, $\int_0^1 f(x)\,dx$의 최솟값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

조건 (가)에서 $\int_0^x tf'(t)\,dt = 2F(x) + kx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xf'(x) = 2f(x) + k \qquad \cdots\cdots\cdots ㉠$$

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(단, n은 자연수, a는 0이 아닌 상수)라 하면

㉠의 양변의 최고차항이 서로 같아야 하므로 $anx^n = 2ax^n$에서 $n = 2$

즉, $f(x)$는 이차함수이다. $f(x) = ax^2 + bx + c$(단, a, b, c는 상수)라 하면 ㉠에서

$$2ax^2 + bx = 2ax^2 + 2bx + 2c + k \qquad \cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $b = 2b$, $2c + k = 0$이다.

이때 $b = 0$, $c = -\frac{k}{2}$이므로 $f(x) = ax^2 - \frac{k}{2}$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -3 이므로 $a > 0$이고 $-\frac{k}{2} = -3$에서 $k = 6$

따라서 $f(x) = ax^2 - 3$

$f(1) \geq 0$이므로 $a - 3 \geq 0$, $a \geq 3$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2 - 3)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - 3x\right]_0^1 = \frac{a}{3} - 3 \text{이므로}$$

$\int_0^1 f(x)\,dx$의 최솟값은 $a = 3$일 때 -2이다.

[3-3] [15점]

$a>1$인 상수 a에 대하여 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-a$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x}=-1$

(다) $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{a}|f(x)|\,dx$

(예시답안)

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-a$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^3이고 이차항의 계수는 $-a$이다. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-ax^2+bx+c\ \text{(단, } a,b,c\text{는 상수)}$$

라 하면 $f'(x)=3x^2-2ax+b$ ·········㉠

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-a\}=0$에서 $f(0)=a$이므로 $c=a$이고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$$

이므로 ㉠에서 $b=-1$. 이때 $f'(x)=3x^2-2ax-1$ ·········㉡

이고, $f(x)=x^3-ax^2-x+a=(x^2-1)(x-a)=(x+1)(x-1)(x-a)$이다.

$1\le x\le a$에서 $f(x)\le 0$이므로 $\int_{1}^{a}|f(x)|dx=-\int_{1}^{a}f(x)dx$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=-\int_{1}^{a}f(x)dx$ 이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{a}f(x)dx=0$

따라서 $\int_{-1}^{a}f(x)dx=0$. 즉, $\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)dx=0$

$$\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}$$

$$=\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}-a\right)$$

$$= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0$$

$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0$, $a^4 - 6a^2 - 8a - 3 = 0$, $(a-3)(a+1)^3 = 0$

에서 $a = 3\,(a > 1)$. 따라서 ㉡으로부터 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$이므로 $f'(3) = 8$