[문제 1]

[1-1] [10점]

다음은 $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2 + (4\sin\theta)x + 2\cos\theta + 2 = 0$$

이 중근을 갖도록 하는 모든 θ의 값을 구하는 과정이다.

> 이차방정식 $x^2 + (4\sin\theta)x + 2\cos\theta + 2 = 0$의 판별식을 D라 하면
> 이차방정식이 중근을 가져야 하므로
>
> $$D = (4\sin\theta)^2 - 4(2\cos\theta + 2) = 0$$
>
> 이어야 한다. 즉, $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$
>
> 이고, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 이므로
>
> $$2(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$(\boxed{\text{(가)}})(\cos\theta + 1) = 0$$
>
> 이므로
>
> $$\cos\theta = \boxed{\text{(나)}} \text{ 또는 } \cos\theta = -1$$
>
> $0 \le \theta < 2\pi$에서
>
> $\cos\theta = \boxed{\text{(나)}}$일 때, $\theta = \boxed{\text{(다)}}$ 또는 $\theta = \boxed{\text{(라)}}$이고
>
> $\cos\theta = -1$일 때, $\theta = \boxed{\text{(마)}}$이다.

위의 과정에서 (가) ~ (마)에 알맞은 식 또는 값을 구하시오.

(예시답안)

이차방정식 $x^2 + (4\sin\theta)x + 2\cos\theta + 2 = 0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D = (4\sin\theta)^2 - 4(2\cos\theta + 2) = 0$이어야 한다.

즉, $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$이고 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$이므로 $2(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0$이다.

따라서

$$(\boxed{2\cos\theta - 1})(\cos\theta + 1) = 0$$

에서 $\cos\theta = \boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $\cos\theta = -1$

$0 \le \theta < 2\pi$에서

$\cos\theta = \boxed{\frac{1}{2}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\frac{\pi}{3}}$ 또는 $\theta = \boxed{\frac{5\pi}{3}}$ 이고 $\left(\theta = \frac{5\pi}{3}\right.$ 또는 $\left.\theta = \frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\theta = -1$ 일 때, $\theta = \boxed{\pi}$ 이다.

(가) $2\cos\theta - 1$ (또는 $-2\cos\theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{\pi}{3}$ (라) $\frac{5\pi}{3}$ (마) π

또는

(가) $2\cos\theta - 1$ (또는 $-2\cos\theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{5\pi}{3}$ (라) $\frac{\pi}{3}$ (마) π

[1-2] [10점]

두 곡선

$$y = -3^{x-2} + a, \quad y = 2^x$$

이 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, 상수 a의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a>3$)

(예시답안)

$-3^{x-2}+a=2$에서 $x=\log_3(a-2)+2$이므로 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\log_3(a-2)+2,\ 2\right)$

$2^x=2$에서 $x=1$이므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(1,2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 $\{\log_3(a-2)+2\}-1=2$

$\log_3(a-2)=1$에서 $a-2=3$, $a=5$

[1-3] [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_3 a_{n+2} - \log_3 a_n = 2$$

를 만족시킨다. $a_2 \times a_4 \times a_6 = 3^{15}$일 때, $a_k = 3^{46}$인 자연수 k의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$\log_3 a_{n+2} - \log_3 a_n = 2$에서 $\log_3 \frac{a_{n+2}}{a_n} = \log_3 9$, $a_{n+2} = 9a_n$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a_1 = a$, 공비를 r라 하면

$a_{n+2} = 9a_n$에서 $ar^{n+1} = 9ar^{n-1}$, $r^2 = 9$

모든 항이 양수이므로 $r = 3$

$a_2 \times a_4 \times a_6 = ar \times ar^3 \times ar^5 = a^3 r^9 = a^3 3^9 = 3^{15}$에서 $a^3 = 3^6$, $a = 9$

$a_k = 3^{46}$에서 $9 \times 3^{k-1} = 3^{46}$, $3^{k+1} = 3^{46}$, $k+1 = 46$이므로 $k = 45$

[문제 2]

[2-1] [10점]

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2 f(x) + 3f(x^2)} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

(예시답안)

함수 $f(x)$를 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

조건 (가)에서 분모, 분자의 최고차항을 비교하면

$$\frac{a^2}{5a} = \frac{a}{5} = 2 \text{에서 } a = 10 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$이고 $f(0) = c$이므로 $c = 0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 $f(x) = 10x^2 + bx$이고

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{10x^2 + bx}{x} = \lim_{x \to 0}(10x + b) = b = 3$$

이므로 $f(x) = 10x^2 + 3x$, 따라서 $f(1) = 13$

[2-2] [10점]

실수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수

$$f(x) = -2x^3 + 3(a+2)x^2 - 12ax - \frac{3}{2}a^2 + 18a$$

의 극댓값을 $g(a)$라 할 때, $\lim_{a \to 2+} \frac{g'(a)}{a-2}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$f'(x) = -6x^2 + 6(a+2)x - 12a = -6(x-2)(x-a)$ 이므로 $f'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=a$

$a>2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 $f(a) = a^3 - \frac{15}{2}a^2 + 18a = g(a)$를 갖는다.

$g'(a) = 3a^2 - 15a + 18$ 이므로

$$\lim_{a \to 2+} \frac{g'(a)}{a-2} = \lim_{a \to 2+} \frac{3a^2 - 15a + 18}{a-2} = \lim_{a \to 2+} \frac{3(a-2)(a-3)}{a-2} = \lim_{a \to 2+} 3(a-3) = -3$$

[2-3] [10점]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le t \le 1$일 때, $v(t) = t^3 - t$이다. (나) $t \ge 1$일 때, $a(t) = 2t + 1$이다.

시각 $t = 0$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

조건 (가)에서 $t = 1$일 때 $v(1) = 0$ ………… ㉠

조건 (나)에서 $t \ge 1$일 때 $a(t) = 2t + 1$이므로 $v(t) = t^2 + t + C$ (단, C는 적분상수)

$t = 1$일 때 $v(1) = 2 + C$ ………… ㉡

㉠, ㉡으로부터 $2 + C = 0$에서 $C = -2$. 따라서

$$v(t) = \begin{cases} t^3 - t & (0 \le t \le 1) \\ t^2 + t - 2 & (t \ge 1) \end{cases}$$

이므로 시각 $t = 0$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v(t)|\,dt = \int_0^1 |v(t)|\,dt + \int_1^2 |v(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 (-t^3 + t)\,dt + \int_1^2 (t^2 + t - 2)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left\{\left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right\} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

[문제 3]

[3-1] [10점]

함수 $f(x)=x^3-x^2+2x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

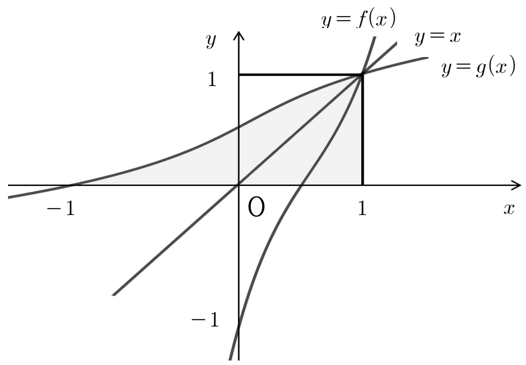
(예시답안)

$f(x)=x^3-x^2+2x-1$에서 $f'(x)=3x^2-2x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$

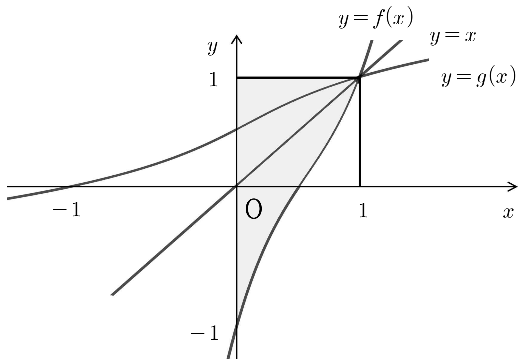
이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 역함수 $g(x)$가 존재한다.

$f(0)=-1$이므로 $g(-1)=0$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 교점의 x좌표는

$$x^3-x^2+2x-1=x,\ (x-1)\left(x^2+1\right)=0\text{에서 } x=1$$



(그림 1)



(그림 2)

$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$는 (그림 1)과 같이 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 한편 곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$는 (그림 2)와 같이 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\,dx &= \int_{0}^{1}\{1-f(x)\}\,dx \\ &= \int_{0}^{1}\left(1-x^3+x^2-2x+1\right)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^1=\frac{13}{12}\end{aligned}$$

[3-2] [15점]

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $ax^4+bx^2+c=\int_0^x (x^2+2t)f'(t)\,dt$이다.
(나) $(a+b)^2=4$

$f(1)>0$일 때, $f'(1)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

(예시답안)

조건 (가)에서 $ax^4+bx^2+c=\int_0^x (x^2+2t)f'(t)\,dt$ 의 양변에 $x=0$을 대입하면

$c=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ 이고 $f'(x)=2ax+b$. 따라서

$$\begin{aligned} ax^4+bx^2 &= \int_0^x (x^2+2t)f'(t)\,dt = \int_0^x (x^2+2t)(2at+b)dt \\ &= \int_0^x \{4at^2+2(b+ax^2)t+bx^2\}dt \\ &= 4a\int_0^x t^2\,dt+2(b+ax^2)\int_0^x t\,dt+bx^2\int_0^x 1\,dt \\ &= \frac{4a}{3}\left[t^3\right]_0^x+(b+ax^2)\left[t^2\right]_0^x+bx^2\left[t\right]_0^x \\ &= ax^4+\left(\frac{4a}{3}+b\right)x^3+bx^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $b=-\frac{4}{3}a$ $\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $(a+b)^2=4$, $a+b=-2$ 또는 $a+b=2$

(i) $a+b=-2$일 때 ㉡과 연립하여 풀면 $a=6, b=-8$에서 $f(x)=6x^2-8x$
$f(1)=-2$이므로 $f(1)>0$를 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=2$일 때 ㉡과 연립하여 풀면 $a=-6, b=8$에서 $f(x)=-6x^2+8x$
$f(1)=2$이므로 $f(1)>0$를 만족시킨다.

따라서 함수 $f(x)=-6x^2+8x$이고 $f'(x)=-12x+8$ 이므로 $f'(1)=-4$

[3-3] [15점]

$a>0$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x<0) \\ -x^2+ax & (x\ge 0) \end{cases}$$

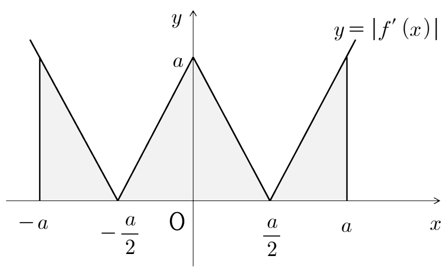
이라 하자. $\int_{-a}^{a}|f'(x)|dx=1$ 일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(-a+2h)-f(a-h)}{h}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

(예시답안)

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=a,\ \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=a$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 이때 $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<0) \\ -2x+a & (x\ge 0) \end{cases}$

$\int_{-a}^{a}|f'(x)|dx$는 (그림)과 같이 x축과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 이루어진 삼각형 넓이의 4배와 같다.



(그림)

$$\int_{-a}^{a}|f'(x)|dx=4\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a\right)=a^2$$

$\int_{-a}^{a}|f'(x)|dx=1$ 이므로

$a^2=1$에서 $a=1\ \ (a>0)$

이때

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ -x^2+x & (x\ge 0) \end{cases} \cdots\cdots ㉠ \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x<0) \\ -2x+1 & (x\ge 0) \end{cases} \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $f(-1)=f(1)=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(-a+2h)-f(a-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(1-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)+f(1)-f(1-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\\&=2f'(-1)+f'(1)\end{aligned}$$

㉡에서 $f'(-1)=-1,\ f'(1)=-1$

이므로 $2f'(-1)+f'(1)=-3$