2023학년도 한국공학대학교

모의 논술고사 답안

공학을 선도하는 미래의 주역

한국공학대학교

문제 1 (45점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = \frac{3}{2}(n+n^2)$이고 수열 $\{c_n\}$의 일반항

$c_n = \left(\frac{a_{n+1}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{3}\right)^2 - 1$일 때, 다음 물음에 답하시오. ($n$은 자연수)

1.(10점) 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

[예시답안]

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}(n+n^2) - \frac{3}{2}(n-1+(n-1)^2) = 3n$$

2.(10점) 수열 $\{c_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} c_n$을 구하시오.

[예시답안]

$$c_n = \left(\frac{a_{n+1}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{3}\right)^2 - 1 = (n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n$$

$$\sum_{n=1}^{10} c_n = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2\,\frac{10 \cdot 11}{2} = 110$$

3.(10점) 함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{7}(x-a_n)^2$의 최솟값을 구하시오.

[예시답안]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{7}(x-3n)^2 = \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{7}(x^2 - 6nx + 9n^2)$$

$$= \frac{1}{7}\left(7x^2 - 6x\frac{7 \cdot 8}{2} + 9\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6}\right) = x^2 - 24x + 180$$

$$\therefore\ f'(x) = 2x - 24$$

따라서 $x = 12$ 일 때, 최솟값 $f(12) = 36$

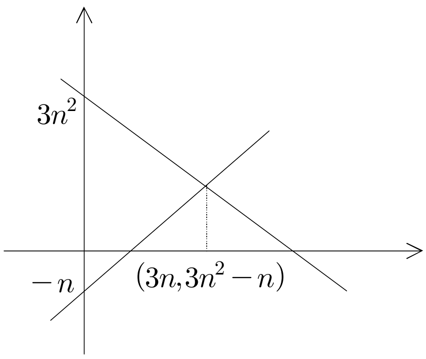
4.(15점) 좌표평면 위의 직선 $x+3y=(a_n)^2$와 직선 $x-\frac{1}{n}y=1$이 만나는 점을 $\mathrm{A_n}$, 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B_n과 C_n이라 하자. 삼각형$\triangle \mathrm{A_nB_nC_n}$의 넓이를 M_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5}\frac{M_n}{3}$ 을 구하시오.

[예시답안]

두 직선의 교점 좌표$(3n, 3n^2-n)$, 두 직선이 y축과 만나는 점$B_n(0, 3n^2), C_n(0, -n)$

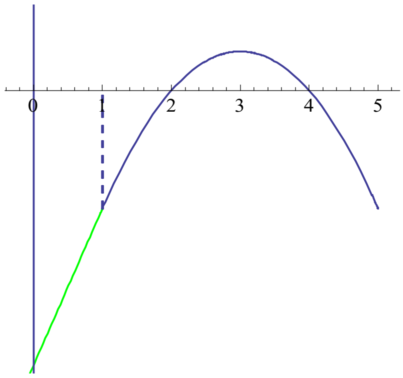
$\therefore$ 삼각형$\triangle A_nB_nC_n$의 넓이 $M_n=\frac{1}{2}(3n^2+n)3n=\frac{1}{2}(9n^3+3n^2)$

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{M_n}{3}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{5}(9n^3+3n^2)=\frac{1}{6}\left(9\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2+3\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}\right)=365$$



문제 2 (45점)

실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases}4 & , x \le 1 \\ 6-2x, & x \ge 1\end{cases}$ 이고, $f(2)=0$ 이다. 다음 물음에 답하시오.



1.(10점) $f(1)$ 값을 구하라.

[예시답안]

$f(x)=\begin{cases}4x+c & , x \le 1 \\ 6x-x^2+d & , x \ge 1\end{cases}$ 이고

$f(2)=0$ 이므로 $12-4+d=0, d=-8$

$f(1)= -3$이고 $f(1) = 4+c=-3$ 이므로 $c=-7$이다.

2.(10점) $f(x)$의 최댓값을 구하라.

[예시답안]

$f(x)=\begin{cases}4x-7 & , x \le 1 \\ -x^2+6x-8 & , x \ge 1\end{cases} = \begin{cases}4x-7 & , x \le 1 \\ -(x-3)^2+1 & , x \ge 1\end{cases}$ 이므로 $x=3$에서 최댓값 $f(3)=1$을 가진다.

3.(10점) 3.극한값 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3f(x)-xf(3)}{x^2-9}$ 의 값을 구하라.

[예시답안]

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{3(f(x)-f(3))+(3-x)f(3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{3}{6}f'(3)-\frac{f(3)}{6}=-\frac{1}{6}$$

4.(15점) 다음 정적분 값을 구하라.

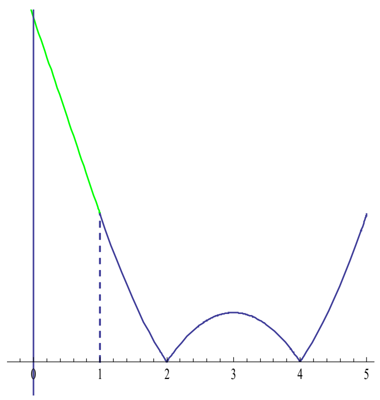
$$\int_0^3 f(x) + |f(x)|\, dx$$

[예시답안]

$0 \le x \le 2$ 일 때, $f(x) \le 0$, $2 \le x \le 3$에서 $f(x) \ge 0$ 이므로

$$\int_0^3 f(x) + |f(x)|\, dx = \int_0^2 f(x) - f(x)\, dx + \int_2^3 f(x) + f(x)\, dx$$

$$= 2\int_2^3 -x^2 + 6x - 8\ dx = \frac{4}{3}$$



문제 3 (60점)

3차 함수 $f(x) = 3x^3 + 6\sin\theta\cos\theta\, x^2 + \sin^2\theta x + \cos\theta$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

1.(10점) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$일 때, 곡선 $y = f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하시오.

[예시답안]

$f(x) = 3x^3 + x = x(3x^2 + 1)$이므로 구하는 x좌표는 $x = 0$

2.(10점) $\theta = \pi$일 때, 곡선 $y = f(x)$에 대한 $x = 1$에서의 접선을 구하시오.

[예시답안]

$f(x) = 3x^3 - 1$, $f'(x) = 9x^2$, $f'(1) = 9$, $f(1) = 2$이므로 구하는 접선은 $y = 9(x-1) + 2 = 9x - 7$

3.(20점) 곡선 $y = f(x)$에 대하여 수평 접선이 단 하나만 생기는 모든 θ 값을 구하시오. (단 $0 < \theta < \pi$)

[예시답안]

수평 접선이 단 하나 일 조건은 $f'(x) = 9x^2 + 12\sin\theta\cos\theta\, x + \sin^2\theta = 0$이 중근 가질 조건이므로

$$D = 36\sin^2\theta\cos^2\theta - 9\sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 36\sin^2\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2}, \sin\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

4.(20점) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 이 곡선에 대한 $x=0$에서의 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

[예시답안]

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $f(x)=3x^3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$이고

$x=0$에서의 접선: $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

접선과 곡선의 교점: $x=0$과 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 구하는 넓이$=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\left(3x^3+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}=\frac{9}{64}$