[문제 1] (45점) 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] (10점)

함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 하자. $f(x)=\log_2 x$이고 $f(3)=a$, $f(5)=b$ 일 때, $g(3a-2b)$의 값을 구하시오.

[풀이]

$g(x)=2^x$이다. 따라서 $g(3a-2b)=\dfrac{2^{3a}}{2^{2b}}=\dfrac{2^{3\log_2 3}}{2^{2\log_2 5}}=\dfrac{27}{25}$.

[문제 1] (45점) 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-2] (10점)

정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 4\}$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+6}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[풀이]

$\{x \mid 1 \le x \le 4\}$에서 $2 \le x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \le 6$이다. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$는 감소함수이므로 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$이다.

[문제 1] (45점) 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-3] (10점)

함수 $y = a^{x-m}$ $(a > 1)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 각각 1과 3일 때, 실수 a와 m의 값을 구하시오.

[풀이]

$y = a^{x-m}$와 역함수의 교점은 $y = a^{x-m}$와 $y = x$의 교점과 같다.

$a^{1-m} = 1$, $a^{3-m} = 3$이므로 $m = 1$, $a = \sqrt{3}$이다.

[문제 1] (45점) 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-4] (15점)

방정식

$$x^3 - 3x^2 + (1 + \log_2 a) = 0$$

이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 양수 a의 값의 범위를 구하시오.

[풀이]

$f(x) = x^3 - 3x^2 + (1 + \log_2 a)$라고 하자.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0) \times f(2) < 0$.

$(1 + \log_2 a)(-3 + \log_2 a) < 0$.

따라서 $\frac{1}{2} < a < 8$.

[문제 2] (45점)

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{2}{3}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 2-1] (10점)

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

[풀이]

$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

극솟값 $f(1)=-1$ 이다.

[문제 2] (45점)

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{2}{3}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 2-2] (10점)

미분가능한 함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 기울기가 3 일 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.

[풀이]

$g'(1)=3$. $f'(x)=x^2+2x-3$. $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=-3$이다.

[문제 2] (45점)

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{2}{3}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 2-3] (10점)

부등식

$$f(x) \geq -3x^2+17x+a+\frac{1}{3}$$

이 $x>0$인 모든 실수에 대하여 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

[풀이]

$h(x)=f(x)-\left(-3x^2+17x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}x^3+4x^2-20x+\frac{1}{3}$

$h'(x)=x^2+8x-20=(x+10)(x-2)$.

x	$\cdots$	-10	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$x>0$인 경우 $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $h(2)=-21$을 가진다.

따라서 $a\leq -21$이고 최댓값은 -21이다.

[문제 2] (45점)

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{2}{3}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 2-4] (15점)

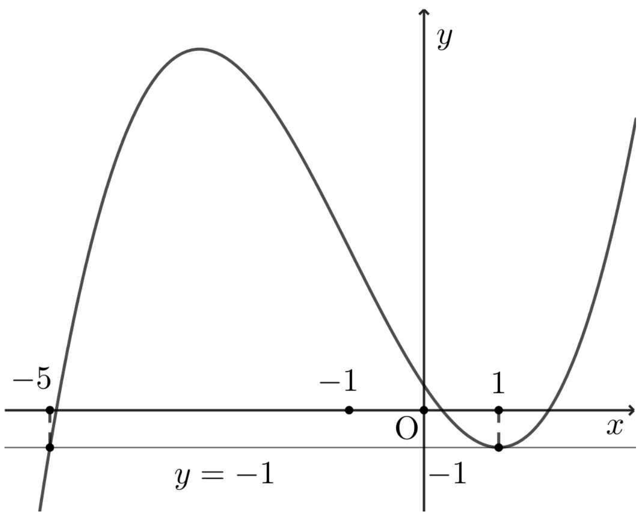
닫힌구간 $[k, k+2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이 되도록 하는 정수 k의 값을 모두 구하시오.

[풀이]

$f(x)$는 [문제 2-1]에 의해서 $x=1$에서 극솟값 -1을 가진다.

따라서 $y=-1$은 $y=f(x)$에 접한다. 다른 한 교점을 구하면 $(-5, -1)$이다.

그래프를 그리면



(1) $f(-5)=f(1)=-1$이므로 $[k, k+2]$에서 $f(x)$의 최솟값이 -1이 되려면 $k=-5$가 되어야 한다.

(2) $[k, k+2]$가 $x=1$을 포함해야 하므로 정수 k의 값은 -1, 0, 1이다.

따라서 $k=-5$, -1, 0, 1이다.

[문제 3] (60점)

$x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $f(x)$가 조건

(가) $f(x) = 1 - (x-2)^2 \ (1 \leq x \leq 3)$
(나) $f(x+2) = \sqrt{3}\, f(x)$

를 만족시키고 함수 $g(x)$가 조건

(다) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (1 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$
(라) $g(x+2) = \sqrt{3}\, g(x)$

를 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] (10점)

$f(0)$과 $g(0)$의 값을 각각 구하시오.

[풀이]

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times f(2) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad g(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times g(2) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

[문제 3] (60점)

$x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $f(x)$가 조건

(가) $f(x) = 1-(x-2)^2 \ (1 \leq x \leq 3)$
(나) $f(x+2) = \sqrt{3}\, f(x)$

를 만족시키고 함수 $g(x)$가 조건

(다) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (1 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$
(라) $g(x+2) = \sqrt{3}\, g(x)$

를 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-2] (10점)

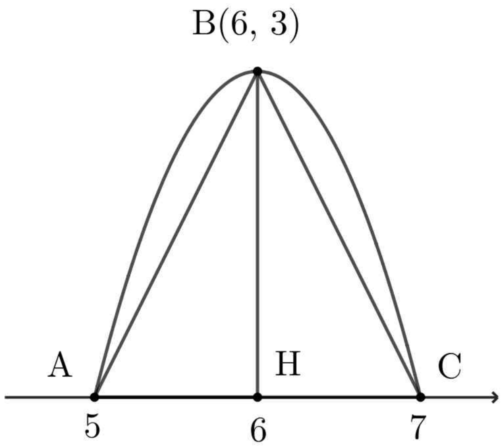
곡선 $y = f(x)$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(5, f(5))$, $\mathrm{B}(6, f(6))$, $\mathrm{C}(7, f(7))$로 이루어진 삼각형 ABC에서 $\sin A$의 값을 구하시오.

[풀이]

$f(5) = \sqrt{3} f(3) = 3f(1) = 0$ 이므로 점 A의 좌표는 $(5, 0)$ 이다.

$f(6) = \sqrt{3} f(4) = 3f(2) = 3$ 이므로 점 B의 좌표는 $(6, 3)$ 이다.

$f(7) = \sqrt{3} f(5) = 0$ 이므로 점 C의 좌표는 $(7, 0)$ 이다.



점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 점 H라고 하면

$\sin A = \dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 이다.

[문제 3] (60점)

$x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $f(x)$가 조건

(가) $f(x) = 1-(x-2)^2 \ (1 \leq x \leq 3)$
(나) $f(x+2) = \sqrt{3}\, f(x)$

를 만족시키고 함수 $g(x)$가 조건

(다) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (1 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$
(라) $g(x+2) = \sqrt{3}\, g(x)$

를 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-3] (20점)

$\sum_{n=1}^{13} f(n)$ 의 값을 구하시오.

[풀이]

$f(1) = 0$이므로 $f(3) = \sqrt{3} f(1) = 0$, $f(5) = \sqrt{3} f(3) = 0$, $\cdots$. 따라서 n이 홀수일 때 $f(n) = 0$이다.

$$\sum_{n=1}^{13} f(n) = f(2) + f(4) + \cdots + f(12)$$

$$= \left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + \cdots + \sqrt{3}^5\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}^6 - 1}{\sqrt{3} - 1} = 13(\sqrt{3} + 1)$$

[문제 3] (60점)

$x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $f(x)$가 조건

(가) $f(x) = 1-(x-2)^2 \ (1 \leq x \leq 3)$
(나) $f(x+2) = \sqrt{3}\, f(x)$

를 만족시키고 함수 $g(x)$가 조건

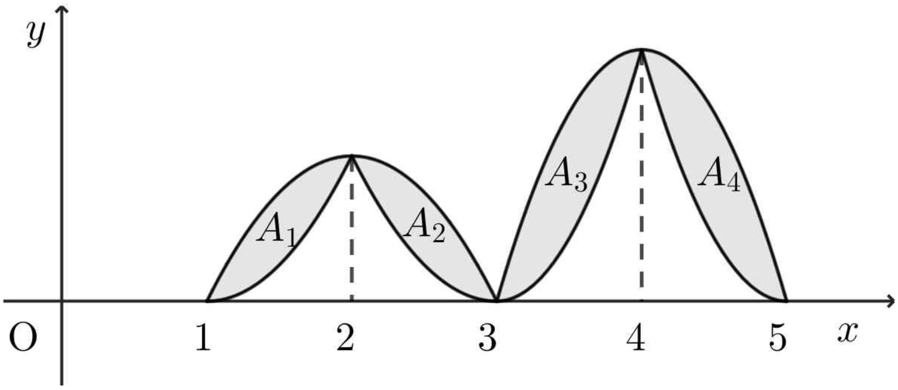
(다) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (1 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$
(라) $g(x+2) = \sqrt{3}\, g(x)$

를 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-4] (20점)

닫힌구간 $[1, 5]$에서 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

[풀이]



대칭성에 의해서 $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$

$A_1 = \int_1^2 [1-(x-2)^2-(x-1)^2]\,dx = \frac{1}{3}$,

$A_3 = \sqrt{3}\int_3^4 [1-(x-4)^2-(x-3)^2]\,dx = \sqrt{3}\int_1^2 [1-(x-2)^2-(x-1)^2]\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 넓이는 $2\times\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ 이다.