## [문제 1] (45점)

함수 $f(x) = 3\sin 2x - 1$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

### [문제 1-1] (10점)

$0 \le x \le \pi$일 때, 방정식 $f(x) = 2$를 푸시오.

### [풀이]

$3\sin 2x - 1 = 2$, $\sin 2x = 1$. $0 \le x \le \pi$ 이므로 $2x = \dfrac{\pi}{2}$. 따라서 $x = \dfrac{\pi}{4}$.

# [문제 1] (45점)

함수 $f(x) = 3\sin 2x - 1$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

## [문제 1-2] (10점)

$0 \le x \le \pi$일 때, 함수 $g(x) = 2^{1-x} + 3$에 대하여 $y = (g \circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

## [풀이]

$0 \le x \le \pi$에서 $-4 \le f(x) \le 2$ 이고 $g(x)$는 감소함수이므로 최댓값은 $g(-4) = 35$이고 최솟값은 $g(2) = \frac{7}{2}$이다.

## [문제 1] (45점)

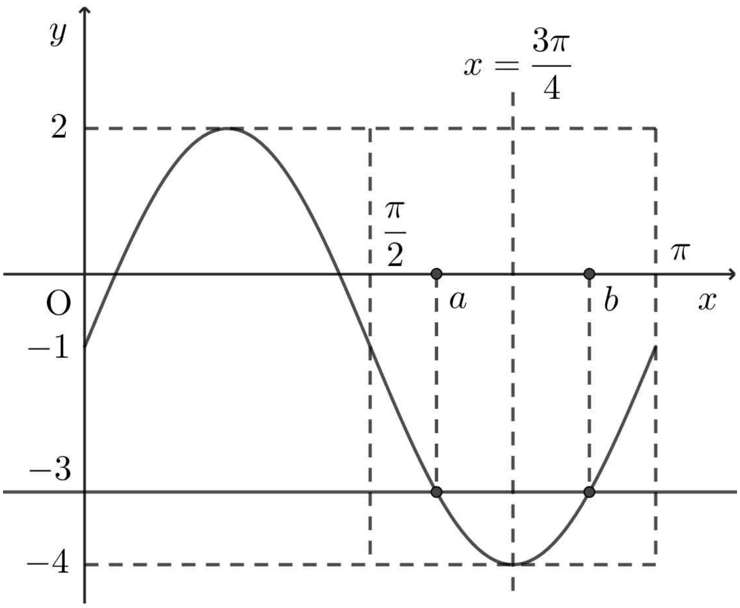
함수 $f(x) = 3\sin 2x - 1$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

### [문제 1-3] (10점)

$0 \le x \le \pi$일 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = -3$과 만나는 서로 다른 두 점의 $x$좌표를 각각 $a$, $b$라 하자. $a+b$의 값을 구하시오.

**[풀이]**

그래프는 다음과 같다.




대칭성에 의해서 $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{4}\pi$ 이므로 $a+b = \frac{3}{2}\pi$ 이다.

# [문제 1] (45점)

함수 $f(x) = 3\sin 2x - 1$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

## [문제 1-4] (15점)

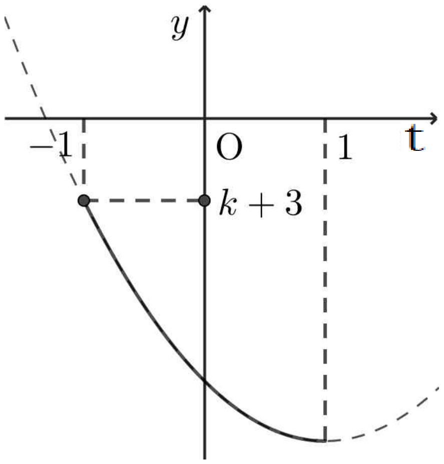
모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$$f(x) \geq k + \sin 2x - \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

가 항상 성립하도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하시오.

**[풀이]**

$t = \sin 2x$라 하면 $-1 \leq t \leq 1$이고 부등식은 $g(t) = t^2 - 2t + k \leq 0$ 이다.




$-1 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t)$의 최댓값 $g(-1) = k + 3$이 0보다 작거나 같아야 하므로 $k \leq -3$이다.

**[문제 2]** (45점) 다음 물음에 답하시오.

**[문제 2-1]** (10점)

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n\, a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, $a_5$의 값을 구하시오.

**[풀이]**

$\{a_n\}$은 첫째 항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_5 = 2^4 = 16$이다.

## [문제 2] (45점) 다음 물음에 답하시오.

**[문제 2-2]** (10점)

수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$2b_{n+1} = b_n + b_{n+2}$$

를 만족시킨다. $b_1 = 1$, $b_2 = 3$일 때, $\sum_{n=1}^{6}(1+b_n)^2$ 의 값을 구하시오.

**[풀이]**

$\{b_n\}$은 첫째 항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 $b_n = 2n-1$이다.

$\sum_{n=1}^{6}(1+b_n)^2 = \sum_{n=1}^{6}4n^2 = 4 \times \dfrac{6\times7\times13}{6} = 364$ 이다.

**[문제 2]** (45점) 다음 물음에 답하시오.

**[문제 2-3]** (10점)

수열 $\{c_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$c_{n+2}=\begin{cases}\dfrac{(c_{n+1})^2}{c_n} & (c_n<5)\\ 2c_{n+1}-c_n & (c_n\ge 5)\end{cases}$$

를 만족시킨다. $c_1=6$, $c_2=4$일 때, $c_8$의 값을 구하시오.

**[풀이]**

$c_1 \ge 5$ 이므로 $c_3=2$, $c_2<5$이므로 $c_4=1$, 계속해서 $c_5=\dfrac{1}{2}$, $c_6=\dfrac{1}{4}$, $c_7=\dfrac{1}{8}$

이므로 $c_8=\dfrac{1}{16}$이다.

## [문제 2] (45점) 다음 물음에 답하시오.

### [문제 2-4] (15점)

제4항이 $p$이고 제7항이 $q$인 등차수열 $\{d_n\}$에 대하여 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-20x+3$$

이 $x=p$에서 극소이고 $x=q$에서 극대일 때, 일반항 $d_n$을 구하시오.

**[풀이]**

$f'(x)=x^2-x-20=(x-5)(x+4)$

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

$d_4=5$이고 $d_7=-4$이다.

$d_n$이 등차수열이므로 $d_4=d_1+3d=5$, $d_7=d_1+6d=-4$. $d_1=14$, $d=-3$.

따라서 $d_n=-3n+17$이다.

# [문제 3] (60점)

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

## [문제 3-1] (10점)

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

**[풀이]**

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

극솟값은 $f(1) = -3$이다.

## [문제 3] (60점)

함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

### [문제 3-2] (10점)

다항함수 $g(x)$ 가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_1^x g(t)\,dt=(x^4-x^2+1)f(x)$$

를 만족시킬 때, $g'(1)$ 의 값을 구하시오.

### [풀이]

적분과 미분의 관계로 부터 좌변은 $g(x)$이다.

양변을 미분하면 $g'(x)=(4x^3-2x)f(x)+(x^4-x^2+1)f'(x)$이다.

따라서 $g'(1)=2f(1)+f'(1)=-6$이다.

## [문제 3] (60점)

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

**[문제 3-3]** (20점)

함수 $p(x) = f(x) + mx^2 + 10x - 2$ 의 역함수가 존재하도록 하는 정수 $m$ 의 값을 모두 구하시오.

**[풀이]**

$p(x) = x^3 + (m+3)x^2 + x$이다. 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수를 가지려면 증가해야 한다. 따라서 $p'(x) = 3x^2 + 2(m+3)x + 1 \geq 0$, $D = 4(m+3)^2 - 12 \leq 0$,
$-3 - \sqrt{3} \leq m \leq -3 + \sqrt{3}$.
따라서 $m = -4$, $-3$, $-2$ 이다.

# [문제 3] (60점)

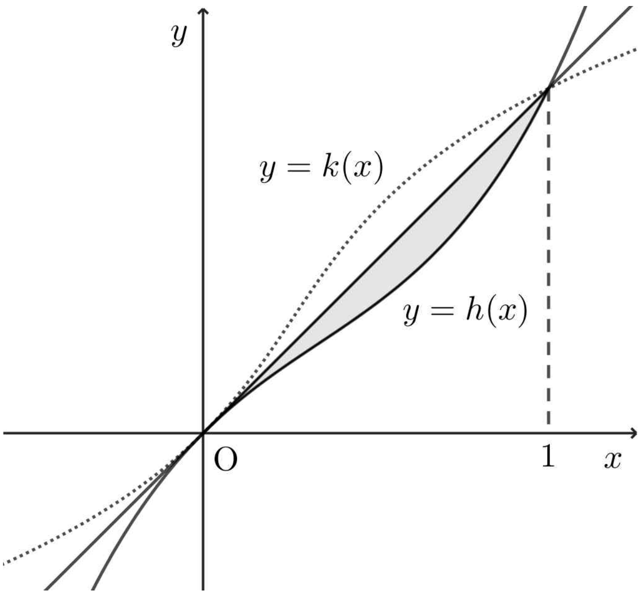
함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

## [문제 3-4] (20점)

함수 $h(x)=f(x)-4x^2+10x-2$의 역함수를 $k(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=h(x)$와 $y=k(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

## [풀이]

$h(x)=x^3-x^2+x$와 $k(x)$의 교점은 $y=h(x)$와 $y=x$의 교점과 같으므로 $x=0$, $1$이다. $x=0$에서 $y=h(x)$의 접선이 $y=x$이므로 도형은 다음과 같다.




구하려는 넓이는 $y=h(x)$와 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 두 배이다.

따라서 넓이는 $2\int_0^1 (x-(x^3-x^2+x))dx=\frac{1}{6}$ 이다.