한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

2022학년도 한국산업기술대학교 수시모집
2차 모의논술고사

(문제 답안)

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제1 답안]

[1-1] [10점]

지수함수 $f(x) = a^x \ (a > 1)$가 $0 \le x \le 3$에서 최댓값 8을 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(예시 답안)

$a > 1$일 때, 함수 $f(x) = a^x$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $0 \le x \le 3$에서 $f(x) = a^x$은 $x = 3$일 때 최대이다. 따라서 $f(3) = a^3 = 8$에서 $a = 2$이다.

[1-2] [10점]

문제 [1-1]에서 구한 a에 대하여 직선 $x=a$가 로그함수 $y=\log_b x\ (b>1)$의 그래프와 만나는 점을 A라 하자. 점 $\mathrm{B}(0,3)$에 대하여 직선 AB의 기울기가 -1일 때 상수 b의 값을 구하시오.

(예시 답안)

문제 [1-1]에서 구한 a는 2이므로 직선 $x=2$와 로그함수 $y=\log_b x\ (b>1)$의 그래프가 만나는 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\log_b 2)$이다. 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(0,3)$이므로 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\log_b 2-3}{2}=-1$이고 $\log_b 2=1$에서 $b=2$이다.

[1-3] [10점]

문제 [1-2]에서 구한 b에 대하여 두 곡선 C_1, C_2를

$$C_1 \ : \ y = \log_b x \, , \quad C_2 \ : \ y = b^x$$

라 하고, 곡선 C_1 위의 점 $(4, \ \log_b 4)$을 P, 직선 $y=x$에 대하여 점 P와 대칭이면서 곡선 C_2 위에 있는 점을 Q라 하자. 삼각형 POQ에서 $\angle\mathrm{POQ}=\theta$라 할 때, 코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

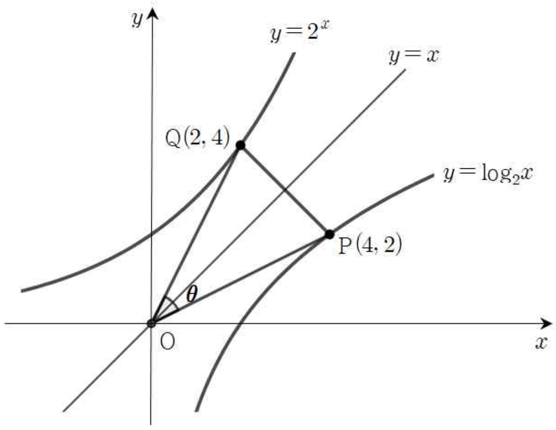
(예시 답안)

문제 [1-2]에서 구한 b는 $b=2$이므로

점 P는 $\mathrm{P}\left(4, \ \log_2 4\right) = \mathrm{P}(4, 2)$이고,

점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 점 P와 대칭이므로 $\mathrm{Q}(2, 4)$이다. 이 때

$$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2\sqrt{5} \, , \ \ \overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{2}$$



삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} \times \cos\theta$$

이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{PQ}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}}} \\ &= \frac{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

[문제2 답안]

[2-1] [10점]

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 $x=1$에서 극댓값 4를 가질 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

(예시 답안)

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로 $f(1)=4,\ f'(1)=0$, 즉

$$f(1)=1+a+b=4, \quad f'(1)=3+2a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6,\ b=9$ 이므로 $f(x)=x^3-6x^2+9x$

[2-2] [10점]

문제 [2-1]에서 구한 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선을 L이라 할 때, L의 방정식을 구하시오.

(예시 답안)

문제 [2-1]에서 구한 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로

$$f'(x)=3x^2-12x+9 \text{ 에서 } f'(0)=9.$$

따라서 원점 $(0, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 대한 접선 L의 방정식은 $y=9x$

[2-3] [10점]

문제 [2-1]에서 구한 함수 $f(x)$와 문제 [2-2]에서 구한 직선 L에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 L로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하시오.

(예시 답안)

$f(x)=x^3-6x^2+9x$, L : $y=9x$이므로 교점은

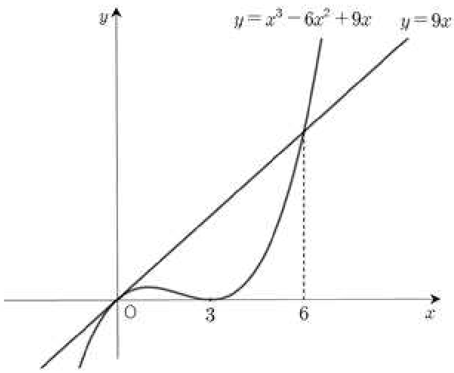
$x^3-6x^2+9x=9x$, $x^2(x-6)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=6$

따라서 L과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^6\{9x-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$=\int_0^6(-x^3+6x^2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3\right]_0^6$$

$$=108$$



[문제3 답안]

삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\ (a>0)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[3-1] [10점]

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 $-\frac{1}{6}$일 때 상수 a와 $f(x)$를 구하시오.

(예시 답안)

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2$에서 $f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$, $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$ 이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=a$에서 극솟값 $-\frac{1}{6}a^3$을 갖는다.

극댓값과 극솟값의 합이 $-\frac{1}{6}$에서

$$-\frac{1}{6}a^3=-\frac{1}{6},\ a^3=1,\ a=1$$

이므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

[3-2] [15점]

문제 [3-1]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+bx$라 하자. 함수 $g(x)$가 극값을 갖도록 하는 정수 b의 최댓값을 구하시오.

(예시 답안)

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ 이므로 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+bx$. 함수 $g(x)$가 극값을 가져야 하므로 방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $g'(x)=x^2-x+b$에서 이차방정식 $x^2-x+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1-4\times 1\times b>0,\quad 1-4b>0\text{에서 } b<\frac{1}{4}$$

이므로 정수 b의 최댓값은 0

[3-3] [15점]

문제 [3-1]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$를 구하시오.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x h(t)\,dt = 6f(x)+px$이다. (단, p는 상수이다.)

(예시 답안)

문제 [3-1]에서 구한 $f(x)$는 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$이다.

$$\int_1^x h(t)\,dt = 6f(x)+px \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

에서 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=6f(1)+p$, 이 때 $f(1)=-\frac{1}{6}$이므로 $p=1$.

따라서 식 ①은

$$\int_1^x h(t)\,dt = 6f(x)+x$$

이고, 양변을 x에 대하여 미분하면 $h(x)=6f'(x)+1$, 이 때 $f'(x)=x^2-x$이므로

$h(x)=6x^2-6x+1$