2022학년도 한국산업기술대학교 수시모집 1차 모의논술고사

(문제 답안)

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제1 답안]

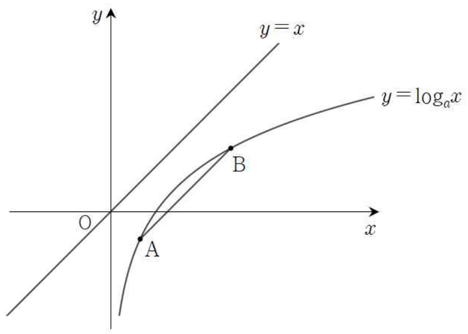
[1-1] [10점]

좌표평면에서 곡선 $y = \log_a x\ (a > 1)$ 위의 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 직선 AB는 직선 $y = x$와 평행하고 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이다. 점 A의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, a의 값을 구하시오.

(단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

(예시 답안)

점 A의 x좌표가 $\frac{2}{3}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, \log_a \frac{2}{3}\right)$이다. 직선 AB는 직선 $y = x$와 평행하므로 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이다. 점 B의 좌표를 $(b, \log_a b)$라 하면, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로



$$b - \frac{2}{3} = 2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ㉠$$

$$\log_a b - \log_a \frac{2}{3} = 2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ㉡$$

㉠에서 $b = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$,

㉡에서 $\log_a \frac{8}{3} - \log_a \frac{2}{3} = 2$, $\log_a 4 = 2$

따라서 $a = 2$

[1-2] [10점]

문제 [1-1]에서 구한 a에 대하여 함수 $f(x)=a^{x+k}$ $(k\leq-1)$의 역함수를 $g(x)$라 하고,
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$이고 두 점 C, D의 x좌표의 합이 3일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.
(단, 점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표보다 크다.)

(예시 답안)

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 C, D는 직선 $y=x$ 위에 있다. $\mathrm{C}(\alpha, \alpha)$, $\mathrm{D}(\beta, \beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면,

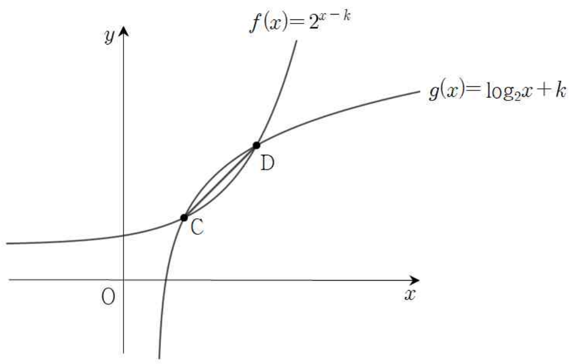
$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$에서

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}$$

$$(\beta-\alpha)^2=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ㉠$$

두 점 C, D의 x좌표의 합이 3이므로

$$\alpha+\beta=3 \qquad \cdots\cdots\cdots ㉡$$



$\alpha<\beta$이므로 ㉠, ㉡에서 $\alpha=1, \beta=2$이다.
문제 [1-1]에서 구한 $a=2$이므로 $f(x)=2^{x+k}$이고, 함수 $f(x)=2^{x+k}$의 그래프가 점 $\mathrm{C}(1,1)$을 지나므로 $k=-1$. 따라서 $f(x)=2^{x-1}$이므로
$f(3)=2^{3-1}=4$.

[1-3] [10점]

문제 [1-2]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=1$이 만나는 점을 P, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $x=4$가 만나는 점을 Q, 직선 $y=x$와 직선 $x=4$가 만나는 점을 R라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{PQR})$의 값을 구하시오.

(예시 답안)

문제 [1-2]에서 구한 $f(x)$는 $f(x)=2^{x-1}$이므로 역함수는 $g(x)=\log_2 x+1$이다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=1$이 만나는

점 P의 좌표는 $(1,1)$,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $x=4$가 만나는

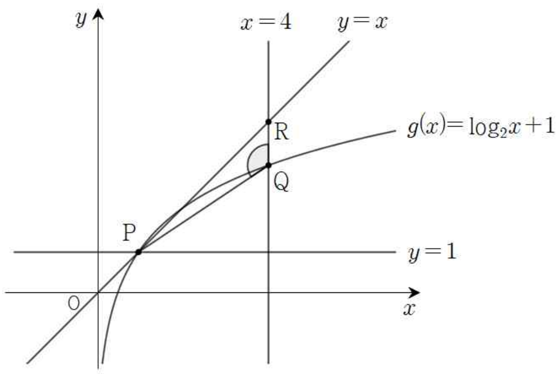
점 Q의 좌표는 $(4,3)$,

직선 $y=x$와 직선 $x=4$가 만나는

점 R의 좌표는 $(4,4)$이다.

세 점 P, Q, R에 대하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{13},\ \overline{\mathrm{QR}}=1,\ \overline{\mathrm{PR}}=3\sqrt{2}$$



이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{PQR})=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2-\overline{\mathrm{PR}}^2}{2\,\overline{\mathrm{PQ}}\,\overline{\mathrm{QR}}}=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

[문제2 답안]

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$ $(t>0)$에서의 접선을 L_1, 점 P를 지나고 이 점에서 직선 L_1에 수직인 직선을 L_2, 직선 L_2가 y축과 만나는 점을 Q라 하자.

[2-1] [10점]

곡선 $y=x^2$, 직선 L_1 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$를 구하시오.

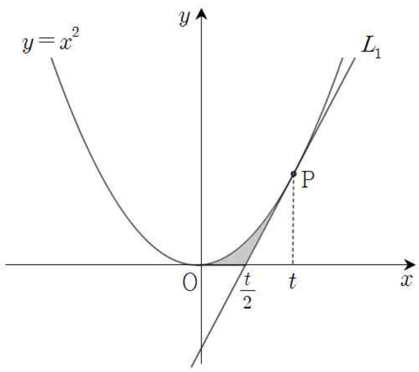
(예시 답안)

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$ $(t>0)$에서의 접선 L_1의 기울기는 $2t$이다. 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$에서의 접선 L_1의 방정식은

$$y-t^2=2t(x-t),\ y=2tx-t^2$$

이때 접선 L_1의 x절편은 $\frac{t}{2}$이므로 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\int_0^t x^2dx-\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2=\frac{t^3}{3}-\frac{t^3}{4}=\frac{t^3}{12}$$



[2-2] [10점]

문제 [2-1]에서의 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(t)$라 하자. 문제 [2-1]에서 구한 $f(t)$와 $g(t)$에 대하여, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(예시 답안)

접선 L_1의 기울기는 $2t$이므로 직선 L_2의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$이다. 따라서 직선 L_2의 방정식은

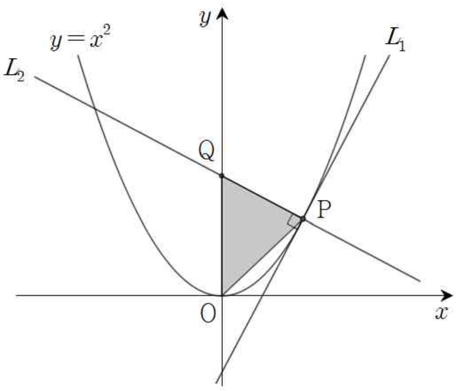
$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t),\ y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

이고, 직선 L_2의 y절편은 $t^2+\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{Q}\left(0,\ t^2+\frac{1}{2}\right)$이다. 이때, 삼각형 OPQ의 넓이

$g(t)$는

$$g(t)=\frac{1}{2}\times\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}t$$



이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^3}{12}}{\frac{t^3}{2}+\frac{t}{4}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

[2-3] [10점]

문제 [2-1]과 [2-2]에서 구한 함수 $f(t)$와 $g(t)$에 대하여 함수 $h(t)$를 $h(t)=9f(t)-g(t)$라 하자. 모든 실수 x에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x h(t)\,dt$라 할 때, 함수 $F(x)$의 극값을 모두 구하시오.

(예시 답안)

$h(t)=9f(t)-g(t)=\frac{3}{4}t^3-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{4}t$ 이고, $F(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ 에서

$$F'(x)=h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x$$

이다. $h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}x(x-1)(x+1)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값

$$F(0)=\int_0^0 h(t)dt=0$$

을 갖고, $x=\pm 1$에서 극솟값

$$F(-1)=\int_0^{-1} h(t)dt=\int_0^{-1}\left(\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{4}t\right)dt=\left[\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{8}t^2\right]_0^{-1}=-\frac{1}{16}$$

$$F(1)=\int_0^{1} h(t)dt=\int_0^{1}\left(\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{4}t\right)dt=\left[\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{8}t^2\right]_0^{1}=-\frac{1}{16}$$

을 갖는다.

[문제3 답안]

[3-1] [10점]

실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=x^3-3x$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$를 구하시오.

(예시 답안)

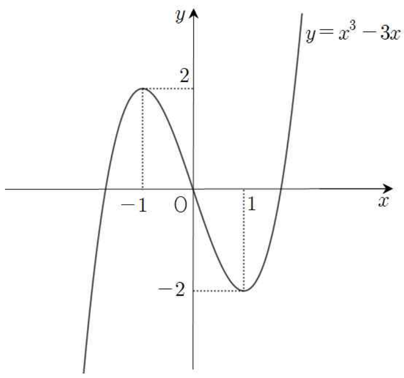
$f(x)=x^3-3x$라 할 때 $f'(x)=3x^2-3$,

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

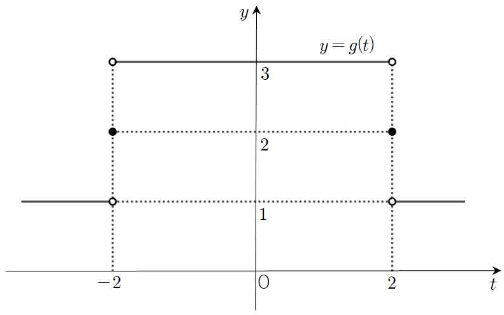


따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 -2

를 가지므로 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 1, & (t<-2) \\ 2, & (t=-2) \\ 3, & (-2<t<2) \\ 2, & (t=2) \\ 1, & (t>2) \end{cases}$$



[3-2] [15점]

문제 [3-1]에서 구한 함수 $g(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 함수 $h(x)$와 $h(1)\times h'(1)$의 값을 구하시오.

(예시 답안)

문제 [3-1]의 함수 $g(x)$로부터 함수 $g(x)h(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)h(x)=\begin{cases} h(x), & (x<-2) \\ 2h(-2), & (x=-2) \\ 3h(x), & (-2<x<2) \\ 2h(2), & (x=2) \\ h(x), & (x>2) \end{cases}$$

함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $g(x)h(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $g(x)h(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -2-} g(x)h(x)=\lim_{x\to -2+} g(x)h(x)=2h(-2)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to -2-} g(x)h(x)=\lim_{x\to -2-} h(x)=h(-2),\quad \lim_{x\to -2+} g(x)h(x)=\lim_{x\to -2+} 3h(x)=3h(-2)$$

$$h(-2)=3h(-2)=2h(-2)$$

이므로 $h(-2)=0$ ……………… ㉠

(ii) $g(x)h(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 2-} g(x)h(x)=\lim_{x\to 2+} g(x)h(x)=2h(2)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to 2-} g(x)h(x)=\lim_{x\to 2-} 3h(x)=3h(2),\quad \lim_{x\to 2+} g(x)h(x)=\lim_{x\to 2+} h(x)=h(2)$$

$$3h(2)=h(2)=2h(2)$$

이므로 $h(2)=0$ ……………… ㉡

㉠, ㉡에서 $h(x)$는 $(x+2)(x-2)$를 인수로 가지므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=x^2-4$이다. $h'(x)=2x$이므로 $h(1)\times h'(1)=(-3)\times 2=-6$

[3-3] [15점]

문제 [3-2]에서 구한 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $r(x)$를 $r(x)=h(x)(ax+b)$라 하자. $r'(2)=0$이고 함수 $r(x)$의 극댓값은 $\frac{128}{27}$이다. (단, a, b는 상수이고 $a \neq 0$이다.)

(1) **[10점]** 함수 $r(x)$를 구하시오.

(2) **[5점]** 곡선 $y=r'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하시오.

(예시 답안)

(1) 문제 [3-2]의 함수 $h(x)$는 $h(x)=x^2-4$이므로 $r(x)$는 $r(x)=(x^2-4)(ax+b)$이다.

$r'(x)=2x(ax+b)+a(x^2-4)$이고 $r'(2)=0$에서 $4(2a+b)=0$, $b=-2a$.

따라서

$$r(x)=(x^2-4)(ax+b)=a(x+2)(x-2)^2$$

이고,

$$r'(x)=a(x-2)^2+2a(x+2)(x-2)=a(x-2)(3x+2)$$

이다. $r'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$ 이다.

$a<0$일 때, 함수 $r(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $r(2)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $a>0$이다.

함수 $r(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$에서 극대이고 극댓값이 $\frac{128}{27}$이므로

$$r\left(-\frac{2}{3}\right)=a\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{128}{27} \text{ 에서 } a=\frac{1}{2}.$$

따라서 $r(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2$이다.

(2) $r(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2$에서 $r'(x)=\frac{1}{2}(x-2)(3x+2)$이므로 곡선 $y=r'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=-\int_{-\frac{2}{3}}^{2} r'(x)\,dx=-[r(x)]_{-2/3}^{2}=-\left[r(2)-r\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=0+\frac{128}{27}=\frac{128}{27}$$