2022학년도 한국산업기술대학교 논술고사

지원학과	성명	수험번호	소속고등학교

【 유의사항 】

1. 휴대폰 등 일체의 전자기기는 소지할 수 없습니다.
2. 시험시간은 80분입니다.
3. 지원학과, 성명, 수험번호, 소속고등학교명을 반드시 기입하십시오.
4. 답안지 작성시 반드시 검정 펜으로만 작성하십시오.
5. 답안지 작성시 각 문항 번호란에 있는 공간에 답안을 작성하십시오.
6. 답안 작성시 답안은 단계별로 논리적으로 근거와 이유를 설명하여 작성하십시오.
7. 시험이 종료될 때까지 퇴실할 수 없습니다.

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제1] [총 30점]

[1-1] [10점]

함수 $f(x)=2^{x+1}-4$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $g(4)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(2) 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_b x\,(b>0,\, b\neq 1)$ 의 그래프와 점 $(2,1)$에서 만날 때, 두 상수 a, b의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시답안)

(1) $g(4)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=4$

$4=2^{\alpha+1}-4$, $2^{\alpha+1}=8$, $\alpha+1=3$, $\alpha=2$

따라서 $g(4)=2$

(2) 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프는 $y=g(x-a)$

이 그래프가 $(2,1)$을 지나므로 $1=g(2-a)$

역함수의 성질에 의해 $2-a=f(1)$, $2-a=0$, $a=2$

$1=\log_b 2$에서 $b=2$

[1-2] **[10점]**

문제 [1-1]의 (2)에서 구한 a, b에 대하여 두 함수

$$y = a^{x+1},\ \ y = -\left(\frac{1}{b}\right)^x + 3$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 y좌표의 합을 k라 할 때, k의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

$a = 2,\ b = 2$이므로 두 함수

$$y = 2^{x+1},\ y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는

$$2^{x+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

에서

$$2 \times (2^x)^2 - 3 \times 2^x + 1 = 0,\ (2 \times 2^x - 1)(2^x - 1) = 0$$

$2^x = \frac{1}{2}$ 또는 $2^x = 1$

이때 $x = -1$ 또는 $x = 0$

$x = -1$일 때 $y = 1$, $x = 0$일 때 $y = 2$이므로 y좌표의 합 $k = 3$

[1-3] [10점]

문제 [1-2]에서 구한 k에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC} = k$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에서 선분 AB를 $(k+1):1$로 외분하는 점을 D라 하자. $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 삼각형 ADC에서 $\cos(\angle DAC)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

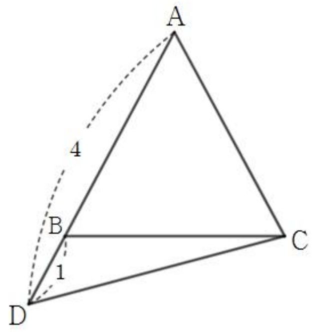
(2) 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이를 구하는 과정을 서술하시오.

(예시답안)

(1) $k = 3$이므로 $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$, $\overline{AD} = k+1 = 4$

이때 $\overline{AC} = 3$, $\overline{AD} = 4$, $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$이므로

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos(\angle DAC) = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{AD}}$$

$$= \frac{3^2 + 4^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{13}{24}$$

(2) 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$$

$$= 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \frac{13}{24} = \frac{33}{4}$$

따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{\sqrt{33}}{2}$

[문제2] [총 30점]

[2-1] [10점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -4$
(나) $f'(2) = 0$

(예시 답안)

함수 $f(x)$를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

조건 (가)에서 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$에서 $f(0) = 0$이므로 $c = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$f'(0) = -4$에서 $b = -4$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 4$$

이므로 조건 (나)에서

$$f'(2) = 12 + 4a - 4 = 0, \ \ a = -2$$

$a = -2,\ b = -4,\ c = 0$이므로 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$

[2-2] [10점]

문제 [2-1]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-4x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

$f(x)=x^3-2x^2-4x$ 이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-4x$가

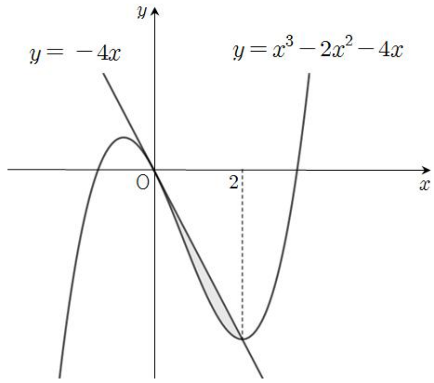
만나는 점의 x좌표는

$$x^3-2x^2-4x=-4x\,,\ x^3-2x^2=0\,,\ x^2(x-2)=0$$

에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 이므로

$y=f(x)$와 직선 $y=-4x$로

둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{-4x-(x^3-2x^2-4x)\}dx \\ &= \int_0^2 (-x^3+2x^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= -4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

[2-3] [10점]

문제 [2-1]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(k+2)x^2+(k+10)x$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $g(x_1) \neq g(x_2)$이다.

(예시 답안)

$f(x)=x^3-2x^2-4x$이므로

$$g(x)=x^3+kx^2+(k+6)x$$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $g(x_1) \neq g(x_2)$인 함수는 일대일함수이다.

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 일대일함수이려면 삼차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \geq 0$

$g'(x)=3x^2+2kx+k+6$이므로

$$3x^2+2kx+k+6 \geq 0$$

이차방정식 $3x^2+2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k)^2-12(k+6) \leq 0,\ k^2-3k-18 \leq 0,\ (k-6)(k+3) \leq 0$$

에서 $-3 \leq k \leq 6$이므로 실수 k의 최댓값은 6

(별해)

$f(x)=x^3-2x^2-4x$이므로

$$g(x)=x^3+kx^2+(k+6)x$$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $g(x_1) \neq g(x_2)$인 함수는 일대일함수이다.

$g'(x)=3x^2+2kx+k+6$이므로

$$g'(x)=3x^2+2kx+k+6 \geq 0$$

$$D=(2k)^2-12(k+6) \leq 0$$

$$k^2-3k-18 \leq 0,\ (k-6)(k+3) \leq 0$$

$$-3 \leq k \leq 6$$

이므로 실수 k의 최댓값은 6

[문제3] [총 40점]

[3-1] [10점]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=-9$
(다) $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=4$

(예시 답안)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\ (a\neq 0)$라 하면 조건 (가)에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$

이므로 $f'(x)=3ax(x-2)$

조건 (나)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}3\times\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}=3f'(1)=-9$$

이므로 $f'(1)=-3$, $-3a=-3$, $a=1$

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$ 이고 $f(x)=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

조건 (다)에서

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+C\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(-3x^2+C\right)dx=2\left[-x^3+Cx\right]_0^1=-2+2C=4$$

에서 $C=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$

[3-2] [15점]

문제 [3-1]에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 9x+b & (x<a) \\ f(x)-3 & (x \ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차가 2일 때, $g(x)$를 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b는 상수이고, $-1<a<2$이다.)

(예시 답안)

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$$\lim_{x \to a-} g(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = g(a)$$

$$9a+b=f(a)-3,\ b=f(a)-3-9a$$

이때 $f(a)=a^3-3a^2+3$이므로

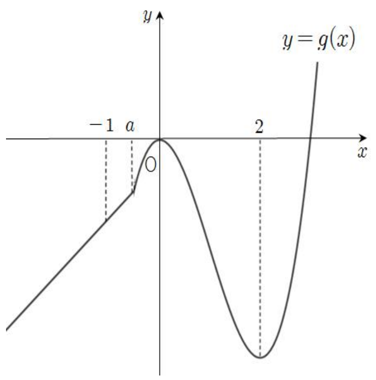
$$b=a^3-3a^2-9a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉠$$

$g(x)$의 극댓값과 극솟값은 a의 값의 범위에 따라 달라진다.
$h(x)=f(x)-3$이라 하면 $h(x)=x^3-3x^2$이고 $h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	0(극대)	$\searrow$	-4(극소)	$\nearrow$

(ⅰ) $-1<a<0$일 때,

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값 -4를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차가 4가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $0 \le a<2$일 때,

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극댓값 $f(a)-3$, $x=2$에서 극솟값 -4를 갖는다.

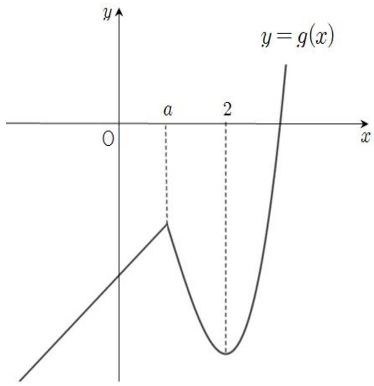
극댓값과 극솟값의 차는 $f(a)+1$이므로

$f(a)+1=2$에서

$a^3-3a^2+2=0$, $(a-1)(a^2-2a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=1-\sqrt{3}$ 또는 $a=1+\sqrt{3}$

$0 \le a < 2$ 이므로 $a=1$이고 ㉠에서 $b=-11$

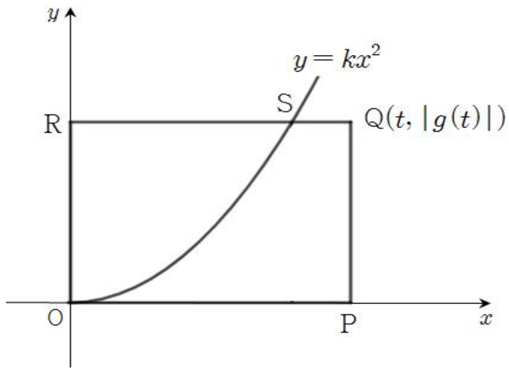


따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} 9x-11 & (x<1) \\ x^3-3x^2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

[3-3] [15점]

문제 [3-2]에서 구한 함수 $g(x)$와 $1<t<3$인 실수 t에 대하여 그림과 같이 좌표평면 위의 함수 $y=|g(x)|$의 그래프 위의 점 $\mathrm{Q}(t, |g(t)|)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, R라 하자. 곡선 $y=kx^2\ (k>0)$이 직사각형 OPQR의 넓이를 이등분할 때, 곡선 $y=kx^2$은 선분 RQ 위의 점 S에서 만난다.



k의 값을 $W(t)$라 할 때, $W(t)$를 구하는 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

(예시 답안)

함수

$$g(x)=\begin{cases} 9x-11 & (x<1) \\ x^3-3x^2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에서 $1<x<3$일 때 $|g(x)|=-x^3+3x^2$이고 $1<t<3$이므로 $|g(t)|=-t^3+3t^2$

곡선 $y=kx^2$과 직선 $y=|g(t)|$의 교점 S의 x좌표를 $\alpha\ (0<\alpha<t)$라 하면 $k\alpha^2=|g(t)|$ 즉,

$$k\alpha^2=-t^3+3t^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

$0\leq x\leq\alpha$에서 곡선 $y=kx^2$과 직선 $y=|g(t)|$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\alpha}(-t^3+3t^2-kx^2)dx=(-t^3+3t^2)\alpha-\frac{k}{3}\alpha^3$$

직사각형 OPQR의 넓이는 $t\times|g(t)|=t\times(-t^3+3t^2)$이다.

곡선 $y=kx^2$이 직사각형 OPQR의 넓이를 이등분하므로

$$(-t^3+3t^2)\alpha-\frac{k}{3}\alpha^3=\frac{1}{2}\times t\times(-t^3+3t^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$k\alpha^2 \times \alpha - \frac{k}{3}\alpha^3 = \frac{1}{2} \times t \times k\alpha^2, \ \frac{2}{3}k\alpha^3 = \frac{1}{2} \times t \times k\alpha^2 \text{ 에서 } \alpha = \frac{3}{4}t$$

이때 곡선 $y = kx^2$은 점 $\left(\frac{3}{4}t, \ -t^3 + 3t^2\right)$을 지나므로

$$-t^3 + 3t^2 = k\left(\frac{3}{4}t\right)^2, \quad k = \frac{16}{9}(3-t)$$

따라서 $W(t) = \frac{16}{9}(3-t)$