2022학년도 한국산업기술대학교 논술고사

지원학과	성명	수험번호	소속고등학교

【 유의사항 】

1. 휴대폰 등 일체의 전자기기는 소지할 수 없습니다.
2. 시험시간은 80분입니다.
3. 지원학과, 성명, 수험번호, 소속고등학교명을 반드시 기입하십시오.
4. 답안지 작성시 반드시 검정 펜으로만 작성하십시오.
5. 답안지 작성시 각 문항 번호란에 있는 공간에 답안을 작성하십시오.
6. 답안 작성시 답안은 단계별로 논리적으로 근거와 이유를 설명하여 작성하십시오.
7. 시험이 종료될 때까지 퇴실할 수 없습니다.

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제1] [총 30점]

[1-1] [10점]

함수 $f(x)=\log_3(x-1)+2$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $g(3)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(2) 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선을 직선 $y=p$라 하자. 함수 $y=\log_2 x-p$의 그래프와 직선 $y=p$가 만나는 점의 x좌표를 k라 할 때, k의 값을 구하는 과정을 서술하시오.
(단, p는 상수이다.)

(예시답안)

(1) $g(3)=\alpha$라 하면, $f(\alpha)=3$

$\log_3(\alpha-1)+2=3$, $\alpha-1=3$, $\alpha=4$

따라서 $g(3)=4$

(2) 함수 $f(x)=\log_3(x-1)+2$의 그래프의 점근선은 직선 $x=1$

함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$

따라서 $p=1$

함수 $y=\log_2 x-p=\log_2 x-1$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의

x좌표는 $\log_2 x-1=1$, $\log_2 x=2$에서 $x=4$

따라서 $k=4$

[1-2] [10점]

자연수 n에 대하여 문제 [1-1]의 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=g(-x+n)$의 그래프가 만나는 점의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) a_n과 b_n을 n에 관한 식으로 나타내는 과정을 서술하시오.

(2) 두 점 $\mathrm{P}(a_4, b_4)$, $\mathrm{Q}(a_6, b_6)$에 대하여 삼각형 OPQ에서 $\cos(\angle\mathrm{POQ})$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

(예시 답안)

(1) 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $-y+n=f(x)$의 그래프와 (b_n, a_n)에서 만난다.

$$a_n=\log_3(b_n-1)+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

$$-a_n+n=\log_3(b_n-1)+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a_n=\dfrac{n}{2}$, $b_n=3^{\frac{n}{2}-2}+1$

(2) $a_n=\dfrac{n}{2}$, $b_n=3^{\frac{n}{2}-2}+1$에서

$a_4=2$, $b_4=3^{\frac{4}{2}-2}+1=2$이므로 $\mathrm{P}(2, 2)$

$a_6=3$, $b_6=3^{\frac{6}{2}-2}+1=4$이므로 $\mathrm{Q}(3, 4)$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=5$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$이므로 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{POQ})=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{2})^2+5^2-(\sqrt{5})^2}{2\times2\sqrt{2}\times5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

[1-3] [10점]

문제 [1-1]의 (2)에서 구한 k에 대하여 직선 $y=\frac{k}{4}$와 함수 $y=\log_a x\,(a>1,\ a\neq 4)$의 그래프가 만나는 점을 A, 직선 $y=\frac{k}{4}$와 함수 $y=\log_4 x$의 그래프가 만나는 점을 B라 하자. 점 C$(1,\ 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 a의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

A$(a, 1)$, B$(4, 1)$, C$(1, 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=|a-4|$, $\overline{\mathrm{AC}}=|a-1|$

문제 조건에 의하여

$|a-4|=2|a-1|$

양변을 제곱하여 풀면

$(a-4)^2=4(a-1)^2$, $a=\pm 2$

문제 조건에 의해 $a=2$

직선 $y=\frac{k}{4}$에서 $k=4$이므로 직선은 $y=1$

[문제2] [총 30점]

[2-1] [10점]

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$가 $x=2$에서 극솟값 -2를 가질 때, 다음 물음에 답하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

(1) 함수 $f(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(2) (1)에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(3, f(3))$을 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

(1) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -2를 가지므로 $f(2)=-2,\ f'(2)=0$

$f(2)=-2$에서 $8+4a+2b+2=-2$

$2a+b=-6$ ………………… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$

$4a+b=-12$ ………………… ㉡

㉠과 ㉡에서 $a=-3,\ b=0$. 따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+2,\ \ f'(x)=3x^2-6x$에서 $f(3)=2,\ \ f'(3)=9$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(3, 2)$에서 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{9}$

따라서 점 $\mathrm{P}(3, 2)$를 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{9}(x-3),\ \ y=-\frac{1}{9}x+\frac{7}{3}$$

[2-2] [10점]

문제 [2-1]의 (1)에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

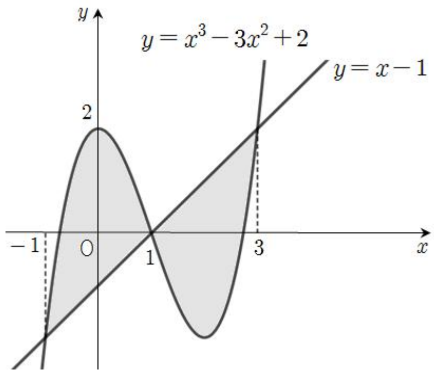
$f(x)=x^3-3x^2+2$이므로 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$$x^3-3x^2+2=x-1,\ x^3-3x^2-x+3=0$$

$$(x+1)(x-1)(x-3)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-3x^2+2)-(x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x-1)-(x^3-3x^2+2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx$$

$$=2\left[-x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$$

$$=4+4=8$$

[2-3] [10점]

문제 [2-1]의 (1)에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f(x) + (3-c)x^2 + cx - 2$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 c의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1 - x_2)\{g(x_1) - g(x_2)\} > 0$이다.

(예시 답안)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$이므로

$$g(x) = f(x) + (3-c)x^2 + cx - 2 = x^3 - cx^2 + cx$$

$(x_1 - x_2)\{g(x_1) - g(x_2)\} > 0$에서

$$x_1 > x_2 \text{이면 } g(x_1) > g(x_2) \text{이고 } x_1 < x_2 \text{이면 } g(x_1) < g(x_2)$$

이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \geq 0$이다. $g'(x) = 3x^2 - 2cx + c$에서

$$3x^2 - 2cx + c \geq 0$$

이때 이차방정식 $3x^2 - 2cx + c = 0$의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$이어야 한다.

$$D = 4c^2 - 12c \leq 0,\ 4c(c-3) \leq 0,\ 0 \leq c \leq 3$$

따라서 구하는 실수 c의 최댓값은 3

[문제3] [총 40점]

[3-1] [10점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$와 양수 p의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $f'(-1)=0,\ f'(2)=0$

(나) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=-2$

(다) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p-2h)}{h}=-18$

(예시 답안)

조건 (가)에서 $f'(-1)=0,\ f'(2)=0$이므로

$$f'(x)=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$$

$f'(x)=3x^2-3x-6$에서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C\right)dx&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-3x^2+Cx\right]_0^2\\&=4-4-12+2C\\&=2C-12=-2\end{aligned}$$

에서 $C=5$

따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+5$

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p-2h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(p+h)-f(p)\}-\{f(p-2h)-f(p)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(p+h)-f(p)}{h}+2\times\frac{f(p-2h)-f(p)}{-2h}\right\}\\&=3f'(p)\end{aligned}$$

$3f'(p)=-18$ 이므로 $f'(p)=-6,\ 3p^2-3p-6=-6,\ p^2-p=0$

$p=0$ 또는 $p=1$ 이때 $p>0$이므로 $p=1$

[3-2] [15점]

문제 [3-1]에서 구한 함수 $f(x)$와 p에 대하여 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오.

> (가) $g(p) = -p$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
>
> $$xg(x) = 2f(x) + ax^2 + 12x - 13 + \int_1^x g(t)dt$$
>
> 이다. (단, a는 상수이다.)

(1) a의 값과 함수 $g(x)$를 구하는 과정을 서술하시오.

(2) 함수 $g(x)$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $kg'(1)$의 값과 같게 되도록 하는 실수 k의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

(1) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$, $p = 1$

조건 (가)에서

$$g(1) = -1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$xg(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 + ax^2 + 12x - 13 + \int_1^x g(t)dt$$

$$xg(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax^2 - 3 + \int_1^x g(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $g(1) = a - 4$, ㉠에서 $a = 3$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g(x) + xg'(x) = 6x^2 - 6x + 2ax + g(x)$$

에서 $xg'(x) = 6x^2 - 6x + 2ax$. $g'(x)$는 다항함수이고 $a = 3$이므로 $g'(x) = 6x$

이때 $g(x) = 3x^2 + C$ (C는 적분상수)

㉠에서 $g(1) = -1$이므로 $C = -4$

따라서 $g(x) = 3x^2 - 4$

(2) 함수 $y = g(x)$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{23 - (-1)}{2} = 12$$

이고 $g'(x) = 6x$, $g'(1) = 6$이므로 $6k = 12$에서 $k = 2$

[3-3] [15점]

문제 [3-2]의 (1)에서 구한 함수 $g(x)$와 양의 실수 t에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\frac{1}{3}\{g(x)+4\}-2tx$$

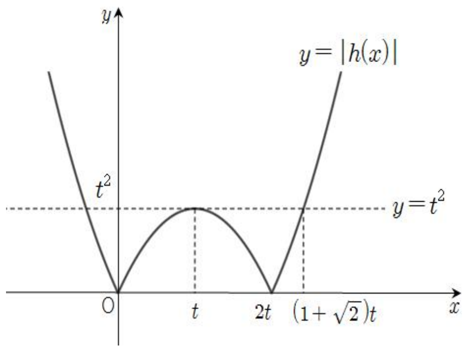
라 하자. 닫힌구간 $[0,1]$에서 함수 $y=|h(x)|$의 최댓값을 $M(t)$라 할 때,

함수 $M(t)$와 $M'\left(\frac{2}{3}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(예시 답안)

$g(x)=3x^2-4$에서

$$h(x)=\frac{1}{3}\{g(x)+4\}-2tx$$
$$=x^2-2tx=x(x-2t)$$



$h(x)=(x-t)^2-t^2$이므로 $x=t$일 때 $|h(t)|=t^2$

곡선 $y=x^2-2tx$와 직선 $y=t^2$의 교점의 x좌표는

$$x^2-2tx=t^2,\quad x^2-2tx-t^2=0$$

에서

$$x=(1-\sqrt{2})t \text{ 또는 } x=(1+\sqrt{2})t$$

이므로 닫힌구간 $[0,1]$에서 함수 $y=|h(x)|$의 최댓값 $M(t)$를 t의 값의 범위에 따라 구하면

(ⅰ) $t>1$일 때 $M(t)=|h(1)|=|1-2t|=2t-1$

(ⅱ) $t\le 1<(1+\sqrt{2})t$일 때, 즉 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}<t\le 1$일 때 $M(t)=|h(t)|=t^2$

(ⅲ) $(1+\sqrt{2})t\le 1$일 때, 즉 $t\le\frac{1}{1+\sqrt{2}}$일 때 $M(t)=|h(1)|=|1-2t|=-2t+1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $M(t)$는

$$M(t)=\begin{cases}-2t+1 & (0<t\le\sqrt{2}-1)\\ t^2 & (\sqrt{2}-1<t\le 1)\\ 2t-1 & (t>1)\end{cases}$$

이고 $\sqrt{2}-1<\frac{2}{3}<1$이므로 $M'(t)=2t$. 따라서 $M'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$