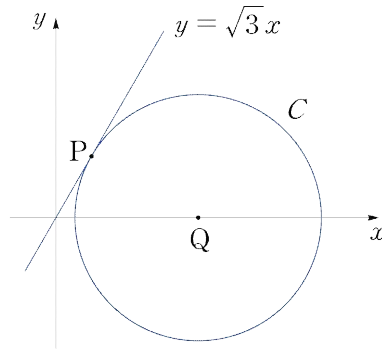


2027학년도 세종대학교
모의논술고사 문제지(자연계열)

[문제 1] 양의 실수 a 와 양의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = ax^2 + t$ 로 정의된 곡선 $y = f(x)$ 가 한 점 P 에서 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 접하도록 하는 a 의 값을 $g(t)$ 라 하자. 원 C 는 점 P 에서 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 접하고, C 의 중심 Q 는 양의 x 축 위에 있다.



다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 점 Q 의 좌표를 t 에 관한 식으로 나타내시오. (80점)

(1-2) y 축 위의 점 $M(0, g(t))$ 에서 원 C 에 그은 접선의 길이를 $\ell(t)$ 라고 하자. 도함수 $\ell'(t)$ 를 구하고, 극한값 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ell'(t)$ 를 구하시오. (90점)

(1-3) 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 삼각형 PQH 를 밑면으로 하는 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 항상 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피 V 를 t 에 관한 식으로 나타내시오. (90점)

2027학년도 세종대학교
모의논술고사 문제지(자연계열)

[문제 2] 함수 $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때 다음 물음에 각각 답하시오.

(2-1) $f(\alpha) = \frac{1}{3}$, $f(\beta) = \frac{4}{3}$ 일 때, $\alpha < 0$, $\beta > 0$ 임을 각각 보이시오. (80점)

(2-2) $g''\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, $g''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ 임을 각각 보이시오. (90점)

(2-3) 두 점 $P(x, g(x))$ 와 $Q(x+1, g(x+1))$ 사이의 거리가 최대가 되는 x 의 값을 구하시오. (100점)

2027학년도 세종대학교
모의논술고사 문제지(자연계열)

[문제 3] 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $g(2) - g'(2)$ 의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가할 때, $g(2)$ 의 최솟값을 구하시오. (90점)

(3-3) 모든 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$ 이고, 어떤 정수 j 에 대하여

$0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$ 일 때, $21 - 6g'(1)$ 이 취할 수 있는 값의 범위를 구하시오. (100점)

논술고사 모범답안

모집시기

2027학년도 세종대학교 온라인 모의논술

전형명

모의논술고사

유형

자연

[문제 1]

(1-1) 점 P의 좌표를 $(p, \sqrt{3}p)$ 라 하자. $f(x) = ax^2 + t$ 이므로

$f'(p) = 2ap = \sqrt{3}$ 이다. 한편, 점 P가 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $ap^2 + t = \sqrt{3}p$ 가 성립한다.

두 식 $2ap = \sqrt{3}$ 과 $ap^2 + t = \sqrt{3}p$ 를 연립하여 풀면, $p = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, $a = \frac{3}{4t}$ 이 나온다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t, 2t\right)$, $g(t) = \frac{3}{4t}$ 이다.

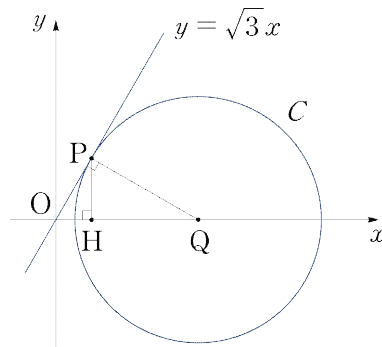
직선 PQ는 $y - 2t = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}t\right)$ 이므로 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t$ 이다.

이 직선과 x 축이 만나는 점이 Q이므로 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}t, 0\right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$ 이다.

(별해) 다음 그림과 같이 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면, 앞의 풀이에서와 같이

$\overline{OH} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$, $\overline{OP} = \frac{4t}{\sqrt{3}}$ 임을 알 수 있고 삼각형 OPQ와 삼각형 OHP의 닮음 관계를 이용하면

$\overline{OH} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OQ}$ 로부터 $\overline{OQ} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OH}} = \frac{8}{\sqrt{3}}t$ 이다. 따라서 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}t, 0\right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$ 이다.

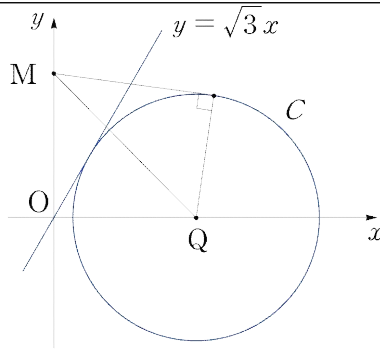


(1-2) 원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면 $R = \overline{PQ} = 4t$ 이다. 다음 그림과 같이

점 $M(0, g(t))$ 에서 원 C에 그은 접선과 C의 접점, M, Q를 꼭짓점으로 하는 도형은 직각삼각형이므로,

$\ell(t)^2 = \overline{MQ}^2 - R^2 = \frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16}t^{-2}$ 이다. 따라서 $\ell(t) = \left(\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16}t^{-2}\right)^{1/2}$ 이므로

$\ell'(t) = \frac{\frac{32}{3}t - \frac{9}{8t^3}}{2\sqrt{\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2}}}$ 이고 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ell'(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다.



(1-3) 한 변의 길이가 k 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}k^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2$ 이다.

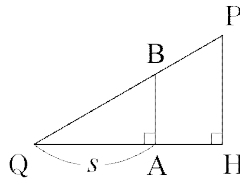
직선 PQ는 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t$ 이므로 입체의 부피는 다음과 같이 $u = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t$ 로 두고

치환적분법을 이용하여 계산하면

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}t}^{\frac{8}{\sqrt{3}}t} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t \right)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{2t}^0 u^2 (-\sqrt{3}) du = 2t^3 \text{ 이다.}$$

(별해)

삼각형 PQH에 대하여 선분 QH 위에 위치하고 점 Q로부터의 거리가 s 인 점을 A, A를 지나고 직선 QH에 수직인 직선이 선분 PQ와 만나는 점을 B라 하자.



이때 $\overline{QH} = 2\sqrt{3}t$, $\overline{AB} = \frac{s}{\sqrt{3}}$ 이고, 한 변의 길이가 $\frac{s}{\sqrt{3}}$ 인 정삼각형의 넓이가 $\frac{s^2}{4\sqrt{3}}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$V = \int_0^{2\sqrt{3}t} \frac{s^2}{4\sqrt{3}} ds = 2t^3$$

[문제 2]

(2-1) $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다. $f(\alpha)(= \frac{1}{3}) < f(0)(= 1) < f(\beta)(= \frac{4}{3})$ 이므로 $\alpha < 0 < \beta$ 이다.

(2-2) $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $g''(x) = \frac{-f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3}$ 이므로

$$g''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3} = \frac{-f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3} = \frac{-6\alpha}{(3\alpha^2 + 3)^3} > 0 \text{ 이고,}$$

$$g''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3} = \frac{-f''(\beta)}{f'(\beta)^3} = \frac{-6\beta}{(3\beta^2 + 3)^3} < 0 \text{ 이다.}$$

(2-3)

점 $P(x, g(x))$ 와 점 $Q(x+1, g(x+1))$ 사이의 거리의 제곱을 $F(x)$ 라 하면

$F(x) = (g(x+1) - g(x))^2 + 1$ 이다. $F'(x) = 2(g(x+1) - g(x))(g'(x+1) - g'(x)) = 0$ 을 만족시키는 x 를 x_0 이라 하고 $a = f^{-1}(x_0)$, $b = f^{-1}(x_0 + 1)$ 이라 하자. $g(x_0 + 1) > g(x_0)$ 이므로

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0 + 1))} = g'(x_0 + 1) = g'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \text{ 이다.}$$

따라서 $f'(b) = f'(a)$ 이고 $b = -a$ 이다. 또한 $x_0 = a^3 + 3a + 1$, $x_0 + 1 = b^3 + 3b + 1 = -a^3 - 3a + 1$ 이므로 $2x_0 + 1 = 2$, 즉 $x_0 = \frac{1}{2}$ 이다.

$F''(x) = 2(g'(x+1) - g'(x))^2 + (g(x+1) - g(x))(g''(x+1) - g''(x))$ 로부터

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(g\left(\frac{3}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(g''\left(\frac{3}{2}\right) - g''\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ 이다.}$$

또한 $f(a) = \frac{1}{2} (< 1)$ 이므로 $a < 0$, $b (= -a) > 0$ 이다. 따라서

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3} = \frac{-f''(a)}{f'(a)^3} = \frac{-6a}{(3a^2 + 3)^3} > 0,$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)^3} = \frac{-f''(b)}{f'(b)^3} = \frac{-6b}{(3b^2 + 3)^3} < 0 \text{ 이므로 } F''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ 이 되어 } x = \frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

두 점 P 와 Q 의 사이의 거리가 최대가 된다.

(별해1) 두 점 P 와 Q 를 각각 $P(f(y), y)$, $Q(f(y+t), y+t)$ ($t > 0$)이라 두자. $f(y+t) - f(y) = 1$ 이므로 $3t^2y + 3ty^2 + t^3 + 3t = 1$ 이다. 두 점 P 와 Q 사이의 거리가 $\sqrt{t^2 + 1}$ 이고 $t > 0$ 이므로 t 가 최대일 때 P 와 Q 사이의 거리가 최대가 된다. 음함수의 미분법을 사용하여 $\frac{dt}{dy} = -\frac{2ty + t^2}{(y+t)^2 + 1}$ 을 얻으므로, $\frac{dt}{dy} = 0$ 은 $y = -\frac{t}{2}$ 일 때이다.

$$\frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{\left(2t + 2y\frac{dt}{dy} + 2t\frac{dt}{dy}\right)((y+t)^2 + 1) - (2ty + t^2)\frac{d}{dy}((y+t)^2 + 1)}{((y+t)^2 + 1)^2} \text{ 이므로, } y = -\frac{t}{2} \text{ 이면 } \frac{dt}{dy} = 0 \text{ 이고}$$

$\frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{2t}{(y+t)^2+1} < 0$ 이다. 따라서 $y = -\frac{t}{2}$ 일 때 t 는 최대값을 가진다.

그런데 $1 = f(y+t) - f(y) = f\left(\frac{t}{2}\right) - f\left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{t^3}{4} + 3t$ 이므로, $f(y) = f\left(-\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{4} + 3t\right) + 1 = \frac{1}{2}$ 을

얻고, $x = f(y) = \frac{1}{2}$ 일 때, P와 Q 사이의 거리는 최대이다.

(별해2) $f(x) + f(-x) = 2$, 즉 $f(x) - 1 = 1 - f(-x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 중심으로 대칭이다. 그러므로 $f(x)$ 의 역함수인 $g(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 중심으로 대칭이다.

따라서 $g(1+x) = -g(1-x)$ 이므로 x 대신 $x-1$ 을 대입하면 $g(x) = -g(2-x)$ 이다. 한편 점

$P(x, g(x))$ 와 점 $Q(x+1, g(x+1))$ 사이의 거리는 $\sqrt{(g(x+1) - g(x))^2 + 1}$ 이므로 $t = g(x+1) - g(x)$ 라 두면, t 가 최대일 때 P와 Q 사이의 거리가 최대가 된다. 그런데 $g(x) = -g(2-x)$ 이므로

$g'(x) = g'(2-x)$ 이고

$$\frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(x) = g'(x+1) - g'(2-x)$$

이다. 그러므로 $x+1 = 2-x$, 즉 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{dt}{dx} = 0$ 이다.

(i) $\frac{1}{2} < x < 1$ 이면 평균값 정리에 의하여 어떤 z (단, $1 < 2-x < z < x+1$) 가 존재하여

$\frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(2-x) = g''(z)(2x-1)$ 이고, $z > 1$ 이므로

$$g''(z) = \frac{-f''(f^{-1}(z))}{\{f'(f^{-1}(z))\}^3} = \frac{-f''(g(z))}{\{f'(g(z))\}^3} = \frac{-6g(z)}{\{3(g(z))^2 + 3\}^3} < 0$$

이다. 따라서 $\frac{dt}{dx} < 0$ 이 되어 t 가 감소한다.

(ii) $x \geq 1$ 이면 평균값 정리에 의하여 어떤 z (단, $x < z < x+1$) 가 존재하여

$\frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(x) = g''(z)$ 이고, $z > 1$ 이므로 (i)에서와 마찬가지로 $g''(z) < 0$

이다. 따라서 $\frac{dt}{dx} < 0$ 이 되어 t 가 감소한다.

비슷한 방법으로, $0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때와 $x \leq 0$ 일 때를 나누어 생각하면, 두 경우 모두 $\frac{dt}{dx} > 0$ 이 되어

t 는 증가한다. 따라서 $x = f(y) = \frac{1}{2}$ 일 때 t 가 최대가 되고, 이때 P와 Q 사이의 거리가 최대가 된다.

[문제 3]

(3-1) 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하므로 다음을 알 수 있다.

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}$$

그러므로 적당한 실수 α 에 대하여

$$f'(x) = 3x(x-\alpha) + \frac{1}{2}, f(x) = x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

이다. 그러므로 다음을 얻는다.

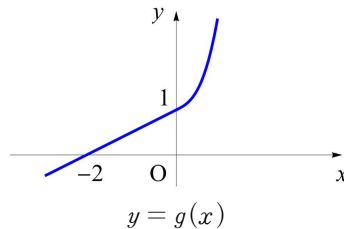
$$g(2) - g'(2) = f(2) - f'(2) = 10 - 6\alpha - \left(12 - 6\alpha + \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

(3-2) $g(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서는 증가하므로, 구간 $[0, \infty)$ 에서 $g(x) = f(x)$ 가 증가하기 위한 조건을 찾으면 된다. 방정식

$$f'(x) = 3x^2 - 3\alpha x + \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

의 판별식 $D = 9\alpha^2 - 6$ 의 값에 따른 실근의 위치를 생각해 보면

① $D < 0$ 인 경우: $-\frac{\sqrt{6}}{3} < \alpha < \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, 방정식 (1)이 실근이 존재하지 않으며 $f'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. (아래 그림)



② $D = 0$ 인 경우: $\alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, 방정식 (1)은 중근을 갖는다. 이 때

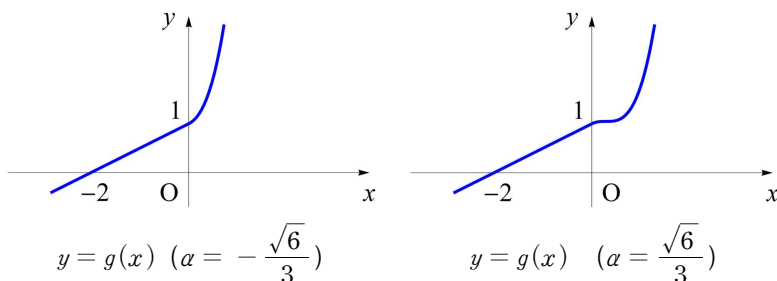
$$f'(x) = 3x^2 \mp \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = \left(\sqrt{3}x \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

이므로 $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 인 점을 제외하고는 $f'(x) > 0$ 이다.

그러므로 $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, 구간 $[0, \infty)$ 에서는 $f'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가한다.

또한 $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 에서만 $f'(x) = 0$ 이고 이 점을 제외하고는 구간 $[0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $\alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. (아래 그림)

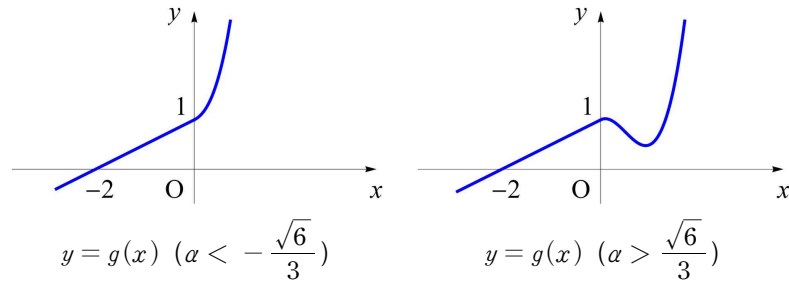


③ $D > 0$ 인 경우: $\alpha < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $\alpha > \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이며 방정식 (1)은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 때,

근과 계수와의 관계를 생각하면 두 근의 곱은 항상 양수이다.

$\alpha < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우 두 근의 합이 음수이므로 두 근은 모두 음이다. 따라서 구간 $[0, \infty)$ 에서는 $f'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가한다. (아래 왼쪽 그림)

$\alpha > \frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우는 두 근의 합이 양수이므로 두 근은 모두 양이다. 따라서 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 의 개형을 생각하면 $g(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하지 않는 구간이 존재한다. (아래 오른쪽 그림)



따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 실수 α 의 범위는 $\alpha \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고,

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ 에서 $g(2) = f(2) = 10 - 6\alpha$ 이므로 $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(2)$ 는 $10 - 2\sqrt{6}$ 으로 최소가 된다.

(3-3) 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구해야 한다.

(가) 모든 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$

(나) 어떤 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$

우선 조건 (가)를 만족시키는 경우를 생각해 보자. 함수 $g(x)$ 의 그래프에 의해 모든 음의 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$ 이 성립하는 것은 자명하므로 k 가 0 이상의 정수일 때를 따져보면 된다. 그런데 (3-2)에서의 계산 결과에 의해

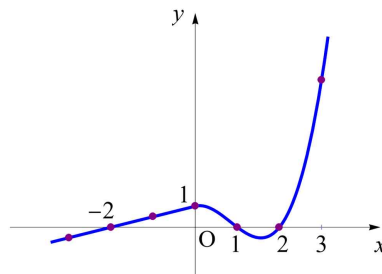
(i) $\alpha \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이면 모든 0 이상의 실수 k 에 대하여 $f(k)f(k+1) \geq 0$ 이 성립한다. 따라서

이 경우 $g(x)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

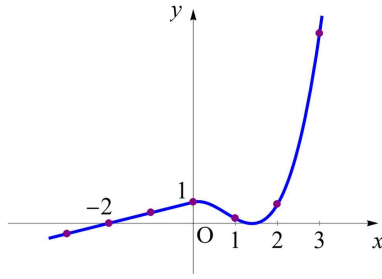
(ii) $\alpha > \frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우 $f'(x) = 3x^2 - 3\alpha x + \frac{1}{2} = 0$ 으로부터 $x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\sqrt{9\alpha^2 - 6}$ 에서 극대,

$x_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6}\sqrt{9\alpha^2 - 6}$ 에서 극소가 된다. (단, $0 < x_1 < x_2$)

우선 $f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha = 0$ 일 때, 즉 $\alpha = \frac{5}{3}$ 일 때 $f(2) = 10 - 6\alpha = 0$ 이고 $1 < x_2 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} < 2$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 개형은 다음과 같고 모든 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$ 이다.



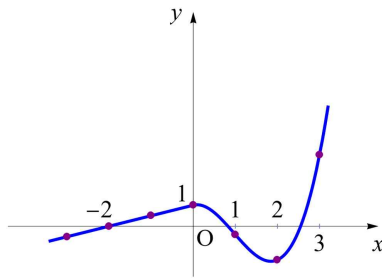
또한 $\frac{\sqrt{6}}{3} < \alpha < \frac{5}{3}$ 인 경우에도 $0 < x_2 < \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} < 2$ 이고 $f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha > 0$, $f(2) = 10 - 6\alpha > 0$ 이 되어 그래프의 개형을 생각하면 조건 (가)를 여전히 만족시킨다. (아래 그림)



그렇지만 $\alpha > \frac{5}{3}$ 일 때는 $f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha < 0$ 이므로 $k=0$ 일 때

$$g(k)g(k+1) = f(0)f(1) = f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha < 0$$

이 되어 주어진 조건 (가)를 만족시키지 않는다. (아래 그림)



결국 $\alpha \leq \frac{5}{3}$ 일 때만 $g(x)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

이제 조건 (나)를 만족시키는 경우를 생각해 보자. 함수 $g(x)$ 의 개형으로부터 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$ 이 성립하려면 j 는 0 이상의 정수여야 한다. 따라서 조건 (나)는 “0 이상의 어떤 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$ ”인 것과 같다.

그런데 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ 이므로 $f(j+1) - f(j) = 3j^2 + 3j - 3\alpha j - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}$ 이고,

0 이상의 어떤 정수 j 에 대하여

$$0 \leq 3j^2 + 3j - 3\alpha j - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{4}$$

즉,

$$\frac{2j^2 + 2j + \frac{5}{6}}{2j+1} \leq \alpha \leq \frac{2j^2 + 2j + 1}{2j+1}$$

이 성립해야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$j=0 \text{ 일 때: } \frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1$$

$$j=1 \text{ 일 때: } \frac{29}{18} \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$$

$$j \geq 2 \text{ 일 때: } \alpha \geq \frac{2j^2 + 2j + \frac{5}{6}}{2j+1} = j + \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2j+1} > 2 > \frac{5}{3} \text{ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

결국 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 실수 α 의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1 \quad \text{또는} \quad \frac{29}{18} \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$$

그런데 $f'(1) = \frac{7}{2} - 3\alpha$ 이므로 $21 - 6g'(1) = 21 - 6f'(1) = 18\alpha$ 가 취할 수 있는 값의 범위는 다음과 같다.

$$15 \leq 21 - 6g'(1) \leq 18 \quad \text{또는} \quad 29 \leq 21 - 6g'(1) \leq 30$$

논술고사 채점기준표 (공지용)

구분	2027학년도 세종대학교 온라인 모의논술		
내용	모의논술고사	유형	자연

문항 번호	풀이	배점 및 참고사항
1-1 (80점)	점 P의 좌표를 $(p, \sqrt{3}p)$라 하자. $f(x) = ax^2 + t$이므로 $f'(p) = 2ap = \sqrt{3}$이다. 한편, 점 P가 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $ap^2 + t = \sqrt{3}p$가 성립한다. 두 식 $2ap = \sqrt{3}$과 $ap^2 + t = \sqrt{3}p$를 연립하여 풀면, $p = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, $a = \frac{3}{4t}$이 나온다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t, 2t\right)$, $g(t) = \frac{3}{4t}$이다. 직선 PQ는 $y - 2t = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$이므로 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t$이다. 이 직선과 x축이 만나는 점이 Q이므로 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}t, 0\right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$이다. (별해) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면, 앞의 풀이에서와 같이 $\overline{OH} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$, $\overline{OP} = \frac{4t}{\sqrt{3}}$임을 알 수 있고 삼각형 OPQ와 삼각형 OHP의 닮음 관계를 이용하면 $\overline{OH} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OQ}$로부터 $\overline{OQ} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OH}} = \frac{8}{\sqrt{3}}t$이다. 따라서 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}t, 0\right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$이다.	- 점 P의 좌표 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}t, 2t\right)$: (40점) - 직선 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{3}t$: (+20점) - 점 Q의 좌표 $\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$: (+20점) (별해) - 점 P의 좌표 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}t, 2t\right)$: (+40점) $\overline{OH} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$: (+10점) $\overline{OP} = \frac{4t}{\sqrt{3}}$: (+10점) - Q $\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$: (+20점)
1-2 (90점)	원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면 $R = \overline{PQ} = 4t$이다. 점 $M(0, g(t))$에서 원 C에 그은 접선과 C의 접점, M, Q를 꼭짓점으로 하는 도형은 직각삼각형이므로, $\ell(t)^2 = \overline{MQ}^2 - R^2 = \frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16}t^{-2}$이다. 따라서 $\ell(t) = \left(\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16}t^{-2}\right)^{1/2}$이므로 $\ell'(t) = \frac{\frac{32}{3}t - \frac{9}{8t^3}}{2\sqrt{\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2}}}$이고 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ell'(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.	$\ell(t)^2 = \frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16}t^{-2}$: (+30점) $\ell'(t) = \frac{\frac{32}{3}t - \frac{9}{8t^3}}{2\sqrt{\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2}}}$: (+30점) $\lim_{t \rightarrow \infty} \ell'(t) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$: (+30점)

1-3
(90점)

한 변의 길이가 k 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}k^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2$ 이다.

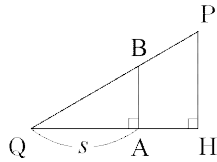
직선 PQ는 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{3}t$ 이므로 입체의 부피는 다음과 같이

$u=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{3}t$ 로 두고 치환적분법을 이용하여 계산하면

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}t}^{\frac{8}{\sqrt{3}}t}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{3}t\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{2t}^0u^2(-\sqrt{3})du=2t^3$$

(별해) 삼각형 PQH에 대하여 선분 QH 위에 위치하고 점 Q로부터의 거리가 s 인 점을 A,

A를 지나고 직선 QH에 수직인 직선이 선분 PQ와 만나는 점을 B라 하자.



이때 $\overline{QH}=2\sqrt{3}t$, $\overline{AB}=\frac{s}{\sqrt{3}}$ 이고, 한 변의 길이가 $\frac{s}{\sqrt{3}}$ 인

정삼각형의 넓이가 $\frac{s^2}{4\sqrt{3}}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$V=\int_0^{2\sqrt{3}t}\frac{s^2}{4\sqrt{3}}ds=2t^3$$

$$\blacksquare V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}t}^{\frac{8}{\sqrt{3}}t}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{3}t\right)^2dx:$$

(+50점)

$$\blacksquare V=2t^3: (+40점)$$

(별해)

$$\blacksquare \overline{QH}=2\sqrt{3}t \text{ 를 구하면 } (+30점)$$

$$\blacksquare \overline{AB}=\frac{s}{\sqrt{3}} \text{ 를 구하면 } (+30점)$$

$$\blacksquare V=\int_0^{2\sqrt{3}t}\frac{s^2}{4\sqrt{3}}ds=2t^3 \text{ 를 구하면 } (+30점)$$

문항 번호	풀이	배점 및 참고사항
2-1 (80점)	$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다. $f(\alpha)(=\frac{1}{3}) < f(0)(=1) < f(\beta)(=\frac{4}{3})$ 이므로 $\alpha < 0 < \beta$ 이다.	▪ $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: (+40점) ▪ $f(\alpha) < f(0) < f(\beta)$: (+40점)
2-2 (90점)	$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $g''(x) = \frac{-f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3}$ 이므로 $g''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3} = \frac{-f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3} = \frac{-6\alpha}{(3\alpha^2+3)^3} > 0$, $g''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3} = \frac{-f''(\beta)}{f'(\beta)^3} = \frac{-6\beta}{(3\beta^2+3)^3} < 0$.	▪ $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$: (+20점) ▪ $g''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-f''(\alpha)}{f'(\alpha)^3}$: (+30점) ▪ $g''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-6\alpha}{(3\alpha^2+3)^3} > 0$: (+20점) ▪ $g''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-6\beta}{(3\beta^2+3)^3} < 0$: (+20점)
2-3 (100점)	점 $P(x, g(x))$와 점 $Q(x+1, g(x+1))$ 사이의 거리의 제곱을 $F(x)$라 하면 $F(x) = (g(x+1) - g(x))^2 + 1$이다. $F'(x) = 2(g(x+1) - g(x))(g'(x+1) - g'(x)) = 0$을 만족시키는 x를 x_0. $a = f^{-1}(x_0)$, $b = f^{-1}(x_0 + 1)$. $g(x_0 + 1) > g(x_0)$이므로 $\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0 + 1))} = g'(x_0 + 1) = g'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$ 따라서 $f'(b) = f'(a)$이고 $b = -a$이다. 또한 $x_0 = a^3 + 3a + 1$, $x_0 + 1 = b^3 + 3b + 1 = -a^3 - 3a + 1$이므로 $2x_0 + 1 = 2$, 즉 $x_0 = \frac{1}{2}$이다. $F''(x) = 2(g'(x+1) - g'(x))^2 + (g(x+1) - g(x))(g''(x+1) - g''(x))$ 로부터 $F''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(g'\left(\frac{3}{2}\right) - g'\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(g''\left(\frac{3}{2}\right) - g''\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 이다. 또한 $f(a) = \frac{1}{2} (< 1)$ 이므로 $a < 0$, $b (= -a) > 0$ 이다. $g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3} = \frac{-f''(a)}{f'(a)^3} = \frac{-6a}{(3a^2+3)^3} > 0,$ $g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-f''\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)^3} = \frac{-f''(b)}{f'(b)^3} = \frac{-6b}{(3b^2+3)^3} < 0$ 이므로 $F''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 이 되어 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 두 점 P와 Q의 사이의 거리가 최대가 된다.	▪ $F'(x_0) = 0$인 x_0에 대하여 $f^{-1}(x_0 + 1) = -f^{-1}(x_0)$를 구하면: (+20점) ▪ $x_0 = \frac{1}{2}$를 구하면: (+40점) ▪ $F''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$을 보이면: (+40점)

(별해1) 두 점 P와 Q를 각각 $P(f(y), y)$, $Q(f(y+t), y+t)$
 $(t > 0)$ 이라 두자. $f(y+t) - f(y) = 1$ 이므로

$3t^2y + 3ty^2 + t^3 + 3t = 1$ 이다. 두 점 P와 Q 사이의 거리가
 $\sqrt{t^2 + 1}$ 이고 $t > 0$ 이므로 t 가 최대일 때 P와 Q 사이의 거리가
 최대가 된다. 음함수의 미분법을 사용하여 $\frac{dt}{dy} = -\frac{2ty + t^2}{(y+t)^2 + 1}$ 을

얻으므로, $\frac{dt}{dy} = 0$ 은 $y = -\frac{t}{2}$ 일 때이다.

$$\frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{\left(2t + 2y\frac{dt}{dy} + 2t\frac{dt}{dy}\right)((y+t)^2 + 1) - (2ty + t^2)\frac{d}{dy}((y+t)^2 + 1)}{((y+t)^2 + 1)^2}$$

이므로, $y = -\frac{t}{2}$ 이면 $\frac{dt}{dy} = 0$ 이고

$$\frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{2t}{(y+t)^2 + 1} < 0 \text{ 이다. 따라서 } y = -\frac{t}{2} \text{ 일 때 } t \text{ 는}$$

최대값을 가진다. 그런데

$$1 = f(y+t) - f(y) = f\left(\frac{t}{2}\right) - f\left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{t^3}{4} + 3t \text{ 이므로,}$$

$$f(y) = f\left(-\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{4} + 3t\right) + 1 = \frac{1}{2} \text{ 을 얻고,}$$

$x = f(y) = \frac{1}{2}$ 일 때, P와 Q 사이의 거리는 최대이다.

(별해2) $f(x) + f(-x) = 2$, 즉 $f(x) - 1 = 1 - f(-x)$ 이므로
 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 중심으로 대칭이다. 그러므로
 $f(x)$ 의 역함수인 $g(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 중심으로
 대칭이다. 따라서 $g(1+x) = -g(1-x)$ 이므로 x 대신 $x-1$ 을
 대입하면 $g(x) = -g(2-x)$ 이다. 한편 점 $P(x, g(x))$ 와 점
 $Q(x+1, g(x+1))$ 사이의 거리는

$\sqrt{(g(x+1) - g(x))^2 + 1}$ 이므로 $t = g(x+1) - g(x)$ 라 두면, t 가
 최대일 때 P와 Q 사이의 거리가 최대가 된다. 그런데
 $g(x) = -g(2-x)$ 이므로 $g'(x) = g'(2-x)$ 이고

$$\frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(x) = g'(x+1) - g'(2-x)$$

이다. 그러므로 $x+1 = 2-x$, 즉 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{dt}{dx} = 0$ 이다.

(i) $\frac{1}{2} < x < 1$ 이면 평균값 정리에 의하여 어떤 z (단,

$1 < 2-x < z < x+1$)가 존재하여

$$\frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(2-x) = g''(z)(2x-1) \text{ 이고, } z > 1 \text{ 이므로}$$

$$g''(z) = \frac{-f''(f^{-1}(z))}{\{f'(f^{-1}(z))\}^3} = \frac{-f''(g(z))}{\{f'(g(z))\}^3} = \frac{-6g(z)}{\{3(g(z))^2 + 3\}^3} < 0$$

이다. 따라서 $\frac{dt}{dx} < 0$ 이 되어 t 가 감소한다.

(ii) $x \geq 1$ 이면 평균값 정리에 의하여 어떤 z (단,

$$x < z < x+1) \text{가 존재하여 } \frac{dt}{dx} = g'(x+1) - g'(x) = g''(z) \text{ 이고,}$$

$z > 1$ 이므로 (i)에서와 마찬가지로 $g''(z) < 0$

별해1)

$$\blacksquare 3t^2y + 3ty^2 + t^3 + 3t = 1: (+20\text{점})$$

$$\blacksquare \frac{dt}{dy} = 0 \text{ 은 } y = -\frac{t}{2} \text{ 일 때: (+20점)}$$

$$\blacksquare x = f(y) = \frac{1}{2}: (+20\text{점})$$

$$\blacksquare \frac{d^2t}{dy^2} = -\frac{2t}{(y+t)^2 + 1} < 0: (+40\text{점})$$

별해2)

$$\blacksquare t = g(x+1) - g(x) \text{ 라 두면, } t \text{가 최대일 때 P와 Q 사이의 거리가 최대임을 보이면: (+20점)}$$

$$\blacksquare x_0 = \frac{1}{2}: (+40\text{점})$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} < x \text{ 일 때 } \frac{dt}{dx} < 0: (+20\text{점})$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} > x \text{ 일 때 } \frac{dt}{dx} > 0: (+20\text{점})$$

	이다. 따라서 $\frac{dt}{dx} < 0$이 되어 t가 감소한다. 비슷한 방법으로, $0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때와 $x \leq 0$ 일 때를 나누어 생각하면, 두 경우 모두 $\frac{dt}{dx} > 0$이 되어 t는 증가한다. 따라서 $x = f(y) = \frac{1}{2}$ 일 때 t가 최대가 되고, 이때 P와 Q 사이의 거리가 최대가 된다.	
--	--	--

문항 번호	풀이	배점 및 참고사항
3-1 (80점)	함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하므로 다음을 알 수 있다. $f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}$ 그러므로 적당한 실수 α 에 대하여 $f'(x)=3x(x-\alpha)+\frac{1}{2}, f(x)=x^3-\frac{3}{2}\alpha x^2+\frac{1}{2}x+1$ 이다. 그러므로 다음을 얻는다. $g(2)-g'(2)=f(2)-f'(2)=10-6\alpha-\left(12-6\alpha+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$	▪ $f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}$: (+20점) ▪ $f(x)=x^3-\frac{3}{2}\alpha x^2+\frac{1}{2}x+1$: (+40점) ▪ $g(2)-g'(2)=-\frac{5}{2}$: (+20점)
3-2 (90점)	$g(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서는 증가하므로, 구간 $[0, \infty)$ 에서 $g(x)=f(x)$ 가 증가하기 위한 조건을 찾으면 된다. 방정식 $f'(x)=3x^2-3\alpha x+\frac{1}{2}=0 \quad \dots\dots (1)$ 의 판별식 $D=9\alpha^2-6$ 의 값에 따른 실근의 위치를 생각해 보면 ① $D<0$ 인 경우: $-\frac{\sqrt{6}}{3}<\alpha<\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, 방정식 (1)이 실근이 존재하지 않으며 $f'(x)>0$ 이므로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. ② $D=0$ 인 경우: $\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, 방정식 (1)은 중근을 갖는다. 이 때 $f'(x)=3x^2\mp\sqrt{6}x+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{3}x\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이므로 $x=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 인 점을 제외하고는 $f'(x)>0$ 이다. 그러므로 $\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, 구간 $[0, \infty)$ 에서는 $f'(x)>0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가한다. 또한 $\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $x=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 에서만 $f'(x)=0$ 이고 이 점을 제외하고는 구간 $[0, \infty)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $g(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다. 따라서 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. ③ $D>0$ 인 경우: $\alpha<-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $\alpha>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이며 방정식 (1)은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 때, 근과 계수와의 관계를 생각하면 두 근의 곱은 항상 양수이다. $\alpha<-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우 두 근의 합이 음수이므로 두 근은 모두 음이다. 따라서 구간 $[0, \infty)$ 에서는 $f'(x)>0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가한다. $\alpha>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우는 두 근의 합이 양수이므로 두 근은 모두 양이다. 따라서 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 의 개형을 생각하면 $g(x)$ 는 구간 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하지 않는 구간이 존재한다. 따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 실수 α 의 범위는 $\alpha\leq\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이고, } f(x)=x^3-\frac{3}{2}\alpha x^2+\frac{1}{2}x+1 \text{ 에서}$ $g(2)=f(2)=10-6\alpha \text{ 이므로 } \alpha=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 일 때 } g(2) \text{ 는 } 10-2\sqrt{6} \text{ 으로 최}$ 최소가 된다.	▪ $-\frac{\sqrt{6}}{3}<\alpha<\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(x)$ 는 증가: (+20점) ▪ $\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(x)$ 증가: (+20점) ▪ $\alpha<-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(x)$ 증가: (+20점) ▪ $\alpha>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 증가하지 않는 구간 존재: (+20점) ▪ $\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 $g(2)$ 는 $10-2\sqrt{6}$ 으로 최소: (+10점)
3-3 (100점)	다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구해야 한다. (가) 모든 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1)\geq 0$	

(나) 어떤 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$

우선 조건 (가)를 만족시키는 경우를 생각해 보자. 함수 $g(x)$ 의 그래프에 의해 모든 음의 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$ 이 성립하는 것은 자명하므로 k 가 0 이상의 정수일 때를 따져보면 된다. 그런데 (3-2)에서의 계산 결과에 의해

(i) $\alpha \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이면 모든 0 이상의 실수 k 에 대하여

$f(k)f(k+1) \geq 0$ 이 성립한다. 따라서

이 경우 $g(x)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

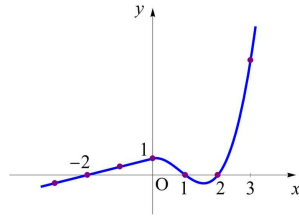
(ii) $\alpha > \frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 경우 $f'(x) = 3x^2 - 3\alpha x + \frac{1}{2} = 0$ 으로부터

$x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\sqrt{9\alpha^2 - 6}$ 에서 극대, $x_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6}\sqrt{9\alpha^2 - 6}$ 에서

극소가 된다. (단, $0 < x_1 < x_2$)

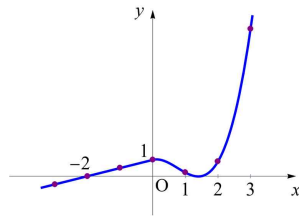
우선 $f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha = 0$ 일 때, 즉 $\alpha = \frac{5}{3}$ 일 때

$f(2) = 10 - 6\alpha = 0$ 이고 $1 < x_2 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} < 2$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 개형은 다음과 같고 모든 정수 k 에 대하여 $g(k)g(k+1) \geq 0$ 이다.



또한 $\frac{\sqrt{6}}{3} < \alpha < \frac{5}{3}$ 인 경우에도 $0 < x_2 < \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6} < 2$ 이고

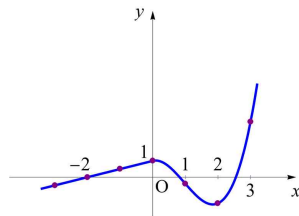
$f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha > 0$, $f(2) = 10 - 6\alpha > 0$ 이 되어 그래프의 개형을 생각하면 조건 (가)를 여전히 만족시킨다. (아래 그림)



그렇지만 $\alpha > \frac{5}{3}$ 일 때는 $f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha < 0$ 이므로 $k=0$ 일 때

$$g(k)g(k+1) = f(0)f(1) = f(1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha < 0$$

이 되어 주어진 조건 (가)를 만족시키지 않는다. (아래 그림)



결국 $\alpha \leq \frac{5}{3}$ 일 때만 $g(x)$ 는 조건 (가)를 만족시킨다.

이제 조건 (나)를 만족시키는 경우를 생각해 보자. 함수 $g(x)$ 의 개형으로부터 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$ 이

성립하려면 j 는 0 이상의 정수여야 한다. 따라서 조건 (나)는 “0 이상의

▪ $\alpha \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 조건 (가) 만족: (+10점)

▪ $\frac{\sqrt{6}}{3} < \alpha < \frac{5}{3}$ 일 때 조건 (가) 만족: (+10점)

▪ $\alpha = \frac{5}{3}$ 일 때 조건 (가) 만족: (+20점)

▪ $\alpha > \frac{5}{3}$ 일 때 조건 (가) 만족 안 함: (+10점)

▪ $j=0$ 일 때 $\frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1$: (+10점)

▪ $j=1$ 일 때 $\frac{29}{18} \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$: (+10점)

▪ $j \geq 2$ 일 때 조건 (가) 만족 안 됨: (+10점)

▪ $\frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1$ 또는 $\frac{29}{18} \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$: (+10점)

▪ $15 \leq 21 - 6g'(1) \leq 18$ 또는 $29 \leq 21 - 6g'(1) \leq 30$: (+10점)

어떤 정수 j 에 대하여 $0 \leq g(j+1) - g(j) \leq \frac{1}{4}$ 인 것과 같다.

그런데 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{2}x + 1$ 이므로

$$f(j+1) - f(j) = 3j^2 + 3j - 3aj - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} \text{이고,}$$

0 이상의 어떤 정수 j 에 대하여

$$0 \leq 3j^2 + 3j - 3aj - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{4}$$

즉,

$$\frac{2j^2 + 2j + \frac{5}{6}}{2j+1} \leq a \leq \frac{2j^2 + 2j + 1}{2j+1}$$

이 성립해야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$j=0 \text{ 일 때: } \frac{5}{6} \leq a \leq 1$$

$$j=1 \text{ 일 때: } \frac{29}{18} \leq a \leq \frac{5}{3}$$

$$j \geq 2 \text{ 일 때: } a \geq \frac{2j^2 + 2j + \frac{5}{6}}{2j+1} = j + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{2j+1} > 2 > \frac{5}{3} \text{이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

결국 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 실수 a 의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{5}{6} \leq a \leq 1 \text{ 또는 } \frac{29}{18} \leq a \leq \frac{5}{3}$$

그런데 $f'(1) = \frac{7}{2} - 3a$ 이므로 $21 - 6g'(1) = 21 - 6f'(1) = 18a$ 가 취할 수 있는 값의 범위는 다음과 같다.

$$15 \leq 21 - 6g'(1) \leq 18 \text{ 또는 } 29 \leq 21 - 6g'(1) \leq 30$$