2026학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

$0 \le a \le 1$일 때, 정적분 $\int_0^{3\pi} |\sin x - a|\,dx$의 값이 최소가 되는 a의 값과 정적분의 최솟값을 구하여라.

[예시 답안]

상수 a에 대하여 함수 $f(x) = \sin x - a$는 주기가 2π이므로

$$\int_0^{3\pi} |f(x)|\,dx = 2\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

이다. $0 \le a \le 1$이므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 곡선 $y = \sin x$와 직선 $y = a$의 교점은 하나만 존재한다. 교점의 x좌표를 θ라 하면 $\sin\theta = a$이다. 두 구간 $[0, \theta]$와 $[\pi - \theta, \pi]$에서 $f(x) \le 0$이고, 구간 $[\theta, \pi - \theta]$에서 $f(x) \ge 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\theta} (\sin\theta - \sin x)\,dx + \int_{\theta}^{\pi-\theta} (\sin x - \sin\theta)\,dx + \int_{\pi-\theta}^{\pi} (\sin\theta - \sin x)\,dx \\ &= (4\theta - \pi)\sin\theta + 4\cos\theta - 2\end{aligned}$$

이고, 구간 $[\pi, 2\pi]$에서 $f(x) \le 0$이므로

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin\theta - \sin x)\,dx = \pi\sin\theta + 2$$

이다.

$$\int_0^{3\pi} |f(x)|\,dx = 2(4\theta - \pi)\sin\theta + 8\cos\theta - 4 + \pi\sin\theta + 2 = (8\theta - \pi)\sin\theta + 8\cos\theta - 2$$

이다. $g(\theta) = (8\theta - \pi)\sin\theta + 8\cos\theta - 2$라 하면, $g'(\theta) = (8\theta - \pi)\cos\theta$이고 함수 $g(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	6	$\searrow$	$8\cos\frac{\pi}{8} - 2$	$\nearrow$	$3\pi - 2$

따라서, 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $g(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{8}$일 때 최솟값을 가진다. 그러므로 $a = \sin\frac{\pi}{8}$일 때 주어진 정적분의 최솟값은 $8\cos\frac{\pi}{8} - 2$이다.

[문제 2] (95점)

타원 $\frac{x^2}{64}+y^2=1$과 제1사분면에서 접하는 접선을 l이라 하자. 직선 l과 직선 $y=-1$의 교점을 A, 직선 l과 y축의 교점을 B라 하자. 점 C$(0,\ -1)$일 때, $\triangle$ABC의 넓이의 최솟값을 구하여라.

[예시 답안]

타원 $\frac{x^2}{64}+y^2=1$ 위의 제1사분면의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 l의 방정식은 $x_1x+64y_1y=64$이다. 직선 l과 직선 $y=-1$의 교점 A의 좌표는 $\left(\frac{64(y_1+1)}{x_1},\ -1\right)$이고, 직선 l과 y축의 교점 B의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{y_1}\right)$이다. 따라서 $\triangle$ABC의 넓이는 $S=\frac{32(y_1+1)^2}{x_1y_1}$이다. $\frac{x_1^2}{64}+y_1^2=1$이므로

$$S^2=\frac{32^2(y_1+1)^4}{(x_1y_1)^2}=\frac{16(y_1+1)^3}{(1-y_1)y_1^2}\quad(0<y_1<1)$$

이다. 구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)=\frac{16(x+1)^3}{(1-x)x^2}$라 하면

$$f'(x)=16\times\frac{3(x+1)^2(x^2-x^3)-(x+1)^3(2x-3x^2)}{(1-x)^2x^4}=16(x+1)^2\times\frac{2x(2x-1)}{(1-x)^2x^4}$$

이고 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	432	$\nearrow$	

따라서 구간 $(0,1)$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 $f(x)$는 최솟값을 갖는다. 그러므로 $y_1=\frac{1}{2}$일 때 $\triangle$ABC의 넓이가 최소가 되고, 그 최솟값은 $12\sqrt{3}$이다.

[문제 3] (105점)

모든 양수 a에 대하여, 중심의 좌표가 (a, a^2)이고 반지름의 길이가 a인 모든 원 위의 점들로 이루어진 영역을 S라 하자. 영역 S에 있는 x좌표가 $t\,(t>0)$인 점 중에서 y좌표가 가장 작은 점을 지나는 원을 $(x-r)^2+(y-r^2)^2=r^2$이라 할 때, t와 r 사이의 관계식을 구하고 $t=\frac{1}{2}$에서 미분계수 $\frac{dr}{dt}$의 값을 구하여라.

[예시 답안]

원 $(x-r)^2+(y-r^2)^2=r^2$과 직선 $x=t$는 $0<r<\frac{t}{2}$일 때는 만나지 않고, $r\geq\frac{t}{2}$일 때에만 만나고 교점의 y좌표는 $y=r^2\pm\sqrt{2rt-t^2}$이다. 이 중 작은 값에서 최소가 될 수 있으므로 $y=r^2-\sqrt{2rt-t^2}$이 최소가 되는 r을 구하면 된다. $f(x)=x^2-\sqrt{2xt-t^2}$라 하면 $f'(x)=2x-\frac{t}{\sqrt{2xt-t^2}}$이고 $x>\frac{t}{2}$에서 $f''(x)=2+t^2(2xt-t^2)^{-\frac{3}{2}}>0$이다. $f'(x)$는 연속인 증가함수이고, $\lim_{x\to\frac{t}{2}+}f'(x)=-\infty$이며 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로, $f'(x)=0$을 만족시키는 x는 오직 하나 존재한다. $f'(x)=0$에서 $t>0$이므로 $4x^2=\frac{t^2}{2xt-t^2}=\frac{t}{2x-t}$이다. 정리하면 $t=\frac{8x^3}{4x^2+1}$을 만족하는 x의 값(이 값을 r이라 하자)에 대하여 $f(x)$는 최솟값을 갖는다. 따라서 구하는 관계식은 $8r^3-t(4r^2+1)=0$이다.

$t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}=\frac{8r^3}{4r^2+1}$에서 $(2r-1)(8r^2+2r+1)=0$이므로 $r=\frac{1}{2}$이다. 음함수의 미분법에 의하여 $24r^2\frac{dr}{dt}-(4r^2+1)-8rt\frac{dr}{dt}=0$이므로 $t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2}$이다.

※참고: 함수 $g(r)=\frac{8r^3}{4r^2+1}\ (r>0)$이라 하면, g는 연속이고 미분가능하며 $g'(r)=\frac{8r^2(4r^2+3)}{(4r^2+1)^2}>0$이다. 따라서 함수 g는 증가함수이므로 g의 역함수가 존재한다. 그러므로 주어진 t에 대하여 주어진 조건을 만족하는 r은 하나만 존재한다.

[문제 4] (총 115점)
1부터 $n\,(n \geq 3)$까지의 자연수를 좌표로 갖는 서로 다른 n개의 점이 수직선 위에 있다. 이 중에서 서로 다른 세 점을 임의로 선택할 때, 그 세 점을 선택한 순서대로 각각 $\mathrm{A, B, C}$라 하자. 수직선에서 두 선분 AB와 AC가 겹치는 부분의 길이를 확률변수 X라 할 때, 다음 물음에 답하여라.
(a) $X=1$일 확률을 구하여라. (40점)
(b) X의 평균을 구하여라. (75점)

[예시 답안]
(a) 확률변수 X가 1인 경우는 다음과 같이 나뉜다.
(i) 점 A의 좌표가 $k\,(k=1,\cdots,n-2)$일 때, 점 B의 좌표가 $(k+1)$이고 점 C의 좌표가 $(k+2), \cdots, n$ 중 하나이거나, 점 C의 좌표가 $(k+1)$이고 점 B의 좌표가 $(k+2), \cdots, n$ 중 하나인 경우
이에 해당하는 경우의 수는 $2\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)=(n-1)(n-2)$이다.
(ii) 점 A의 좌표가 $k\,(k=3,\cdots,n)$일 때, 점 B의 좌표가 $(k-1)$이고 점 C의 좌표가 $1, \cdots, (k-2)$ 중 하나이거나, 점 C의 좌표가 $(k-1)$이고 점 B의 좌표가 $1, \cdots, (k-2)$ 중 하나인 경우
이에 해당하는 경우의 수는 $2\sum_{k=3}^{n}(k-2)=2\sum_{k=1}^{n-2}k=(n-1)(n-2)$이다.
따라서 $X=1$인 경우의 수는 $2(n-1)(n-2)$이다. n개의 점에서 서로 다른 세 점을 순서대로 선택하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)$이므로, $X=1$일 확률은

$$\frac{2(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2}{n}$$

이다.

(b) 확률변수 X가 $(n-1)$ 또는 n일 확률은 0이다. X가 $k\,(k=1,\ \cdots,\ n-2)$인 경우는 다음과 같이 나뉜다.
(i) 점 A의 좌표가 $m\,(m=1,\cdots,n-k-1)$일 때, 점 B의 좌표가 $(m+k)$이고 점 C의 좌표가 $(m+k+1), \cdots, n$ 중 하나이거나, 점 C의 좌표가 $(m+k)$이고 점 B의 좌표가 $(m+k+1), \cdots, n$ 중 하나인 경우
이에 해당하는 경우의 수는 $2\sum_{m=1}^{n-k-1}(n-m-k)=(n-k)(n-k-1)$이다.
(ii) 점 A의 좌표가 $m\,(m=k+2,\cdots,n)$일 때, 점 B의 좌표가 $(m-k)$이고 점 C의 좌표가 $1, \cdots, (m-k-1)$ 중 하나이거나, 점 C의 좌표가 $(m-k)$이고 점 B의 좌표가 $1, \cdots, (m-k-1)$ 중 하나인 경우
이에 해당하는 경우의 수는 $2\sum_{m=k+2}^{n}(m-k-1)=2\sum_{m=1}^{n-k-1}m=(n-k)(n-k-1)$이다.
따라서 $X=k$인 경우의 수는 $2(n-k)(n-k-1)$이다. n개의 점에서 서로 다른 세 점을 순서대로 선택하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)$이므로, X의 평균은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-2}\left[k\times\frac{2(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)}\right]&=\frac{2}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n-2}k(n-k)(n-k-1)\\&=\frac{2}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n-2}\left[k^3-(2n-1)k^2+n(n-1)k\right]\\&=\frac{2}{n(n-1)(n-2)}\times\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{12}\\&=\frac{n+1}{6}\end{aligned}$$

이다.