5 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 수학I, 미적분
	핵심개념 및 용어	타원, 삼각함수, 정적분
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 자료

문제 1 (30점)

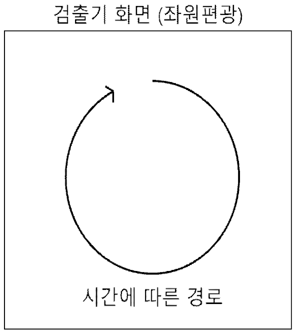
홍익이는 최근 흥행한 영화 [아바타: 물의 길]의 핵심 기술인 3D 안경의 원리를 학습하였다. 그 결과 빛(자연광)은 전기장이 모든 방향으로 진동하면서 전파되지만, 스크린에서 송출된 영상은 좌측 안경을 통해 좌원편광(전기장이 시계 방향으로 회전, 〈그림 1〉)만 통과되고, 우측 안경을 통해 우원편광(전기장이 반시계 방향으로 회전, 〈그림 2〉)만 통과되면서, 인체의 좌우 눈에 각각 다른 영상이 전달되어 영상의 입체감을 유발한다는 사실을 알았다.

이에 영감을 얻은 홍익이는 수행평가로 전기장의 세기 및 방향을 제어하는 편광판을 개발하였다. 특수 제작된 조리개를 돌리면 전기장의 진폭 및 y성분 전기장의 위상차를 θ만큼 조절할 수 있도록 설계하였으며, 개발한 편광판의 효용성을 입증하기 위해서 다음과 같은 실험을 수행하였다. 먼저, 광원과 편광판을 설치하였고, 편광판이 전기장의 방향과 시간에 따른 경로를 어떻게 조절하는지 검출기 화면을 통해 확인하였다.

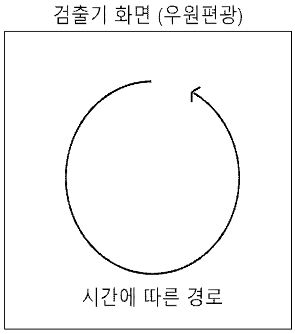
홍익이는 검출된 움직임을 수학적으로 분석하니 전기장은 두 개의 직교하는 성분으로 나눌 수 있음을 알았다.

전기장의 x성분: $x = A\cos 2\pi t$
전기장의 y성분: $y = B\cos(2\pi t + \theta)$

여기서
A, B: 진폭
t: 시간
θ: 위상차(상수)

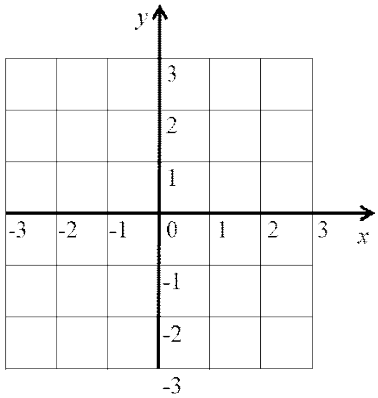


<그림 1>



<그림 2>

(1) $A = B = 1$, $\theta = 0$일 때, 전기장의 x성분과 전기장의 y성분과의 관계를 좌표평면(오른쪽 좌표평면 참조) 위에 그리시오.



(2) $A = B = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{dy}{dx} = a + b\cot 2\pi t$이다. 이때, 상수 a, b를 구하시오. (단, $2t$는 정수가 아니다.)

(3) $A = B = \sqrt{5}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$일 때의 주기를 p라 하자. 시각 $t = 0$에서 $t = \dfrac{p}{4}$까지 전기장이 검출되도록 하였다. 이때, 검출기에 그려진 곡선의 길이를 구하고, 편광판을 통과한 전기장이 좌원편광인지 우원편광인지 판단하시오.

(4) $A = 3$, $B = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$일 때, 검출기에 그려진 곡선에서 1사분면에 위치한 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 M, N이라고 하자. 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고, 삼각형 OMN 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

3. 출제 의도

(1) 고등학교 미적분 과목에서 도형(선 또는 곡선)과 매개변수로 나타낸 함수와의 관계를 이해하고, 삼각함수의 덧셈정리와 함께 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이해하고 있는지 시험하고자 한다. 또한, 매개변수로 나타낸 곡선 길이를 정적분으로 구할 수 있는지 판단하고자 한다.
(2) 기하 과목에서 제시되는 이차곡선 중 하나인 타원의 특성을 파악하고, 매개변수로 나타낸 함수를 함수꼴로 유도할 수 있는지를 시험하고자 한다. 또한, 해당 타원의 접선 방정식을 구하고 산술평균과 기하평균을 이용하여 도형의 최솟값을 구할 수 있는지 평가하고자 한다.
(3) 고교 교육과정의 범위를 준수하고 그 내용을 충실히 반영하여, 수험생들이 이해하기 쉬운 수준으로 구성하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 기하, 확률과 통계
문항 및 제시문	교육과정 및 성취기준
제시문	**[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 (1)	**[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 (2)	**[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
문항 (3)	**[수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용** [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항 (4)	**[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	68-74, 108-111, 124-127, 189-194
	수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2020	75-90
	기하	류희찬 외	천재교과서	2021	20-26, 36-56

5. 문항 해설

(1) 시간 t를 매개변수로 하였을 때, x와 y와 관계를 좌표평면 위에 선 또는 곡선으로 나타낼 수 있다.

(2) 삼각함수의 덧셈정리를 이해하며, 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

(3) 매개변수로 나타낸 함수를 좌표평면 위에 나타내고, 곡선의 길이를 정적분으로 구할 수 있다. 또한, 시간에 따라 변하는 곡선의 방향을 판단할 수 있다.

(4) 타원의 접선 방정식을 구하고 산술평균과 기하평균을 이용하여 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 점 (-1, -1)과 점 (1, 1)을 연결한 선분: 5점. 부분 점수 없음.	5
(2)	- x를 t에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음. - y를 t에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음. - a, b 값: 3점. 부분 점수 없음.	7
(3)	- 곡선의 길이: 4점. 원임을 파악하고 원주를 4로 나누어도 정답. 부분 점수 없음. - 좌원편광 판단: 4점. 부분 점수 없음.	8
(4)	- 접선의 방정식: 2점. 부분 점수 없음 - 넓이를 x_1,y_1로 정의: 3점. 부분 점수 없음. - 산술평균과 기하평균의 관계에 의한 최솟값: 5점. 부분 점수 없음.	10

7. 예시 답안 혹은 정답

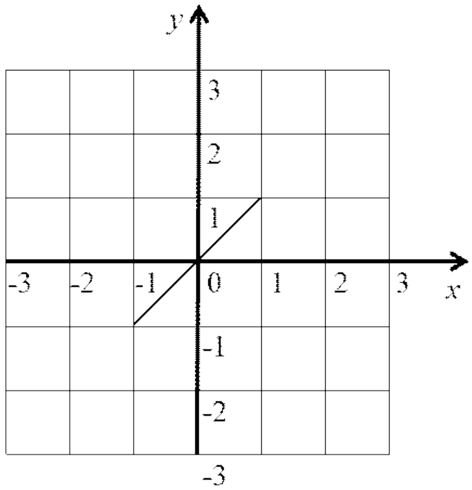
(1) $A = B = 1$, $\theta = 0$일 때, 전기장의 x성분과 전기장의 y성분과의 관계를 좌표평면(오른쪽 좌표평면 참조) 위에 그리시오.

총 5점

- 점 (-1, -1)과 점 (1, 1)을 연결한 선분: 5점. 부분 점수 없음.

풀이) $A = B = 1, \theta = 0$ 일 때, $x = \cos 2\pi t$, $y = \cos 2\pi t$이다. t에 따라서 점 (-1, -1)과 점 (1, 1)을 연결한 선 위에서 진동한다. 따라서, 정답은 전기장의 x성분과 전기장의 y성분의 관계는 $y = x\ (-1 \leq x \leq 1)$이므로 다음과 같다.

답)



(2) $A=B=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=a+b\cot 2\pi t$이다. 이때, 상수 a, b를 구하시오. (단, $2t$는 정수가 아니다.)

총 7점

- x를 t에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음.
- y를 t에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음.
- a, b 값: 3점. 부분 점수 없음.

풀이)

$x=\cos 2\pi t$, $\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin 2\pi t$와 같다.

또한, y는 삼각함수의 덧셈정리에 의해서 아래와 같이 정의된다.

$$y=\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\pi t\times\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2\pi t\times\sin\frac{\pi}{3}=\cos 2\pi t\times\frac{1}{2}-\sin 2\pi t\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}\cos 2\pi t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\pi t$$

따라서, y를 t에 대해서 미분하면,

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{2\pi}{2}\sin 2\pi t-\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{2}\cos 2\pi t=-\pi\sin 2\pi t-\sqrt{3}\,\pi\cos 2\pi t$$

이를 이용해 $\dfrac{dy}{dx}$에 대해서 정리하면,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\pi\sin 2\pi t-\sqrt{3}\,\pi\cos 2\pi t}{-2\pi\sin 2\pi t}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cot 2\pi t$$ (단, $2t$는 정수가 아니다.)

다른 풀이)

$x=\cos 2\pi t$, $\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin 2\pi t$와 같다.

$y=\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\pi\sin\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

이를 이용해 $\dfrac{dy}{dx}$에 대해서 정리하면,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\pi\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)}{-2\pi\sin 2\pi t}=\frac{\sin 2\pi t\times\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\pi t\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin 2\pi t}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cot 2\pi t$$

(단, $2t$는 정수가 아니다.)

답) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $A=B=\sqrt{5}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$일 때의 주기를 p라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=\dfrac{p}{4}$ 까지 전기장이 검출되도록 하였다. 이때 검출기에 그려진 곡선의 길이를 구하고, 편광판을 통과한 전기장이 좌원편광인지 우원편광인지 판단하시오.

총 8점
- 곡선의 길이: 4점. 원임을 파악하고 원주를 4로 나누어도 정답. 부분점수 없음
- 좌원편광 판단: 4점. 부분 점수 없음.

풀이) $A=B=\sqrt{5}, \theta=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, $x=\sqrt{5}\cos 2\pi t$, $y=\sqrt{5}\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{5}\sin 2\pi t$이다.

주기 $p=1$이기 때문에 시각 $t=0$에서 $t=\dfrac{1}{4}$ 까지 이동한 길이는 다음과 같다.

$x=\sqrt{5}\cos 2\pi t$, $\dfrac{dx}{dt}=-2\sqrt{5}\pi\sin 2\pi t$와 같다.

$y=-\sqrt{5}\sin 2\pi t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sqrt{5}\pi\cos 2\pi t$와 같다.

따라서, $l=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2\sin^2 2\pi t+(2\sqrt{5}\pi)^2\cos^2 2\pi t}\,dt$

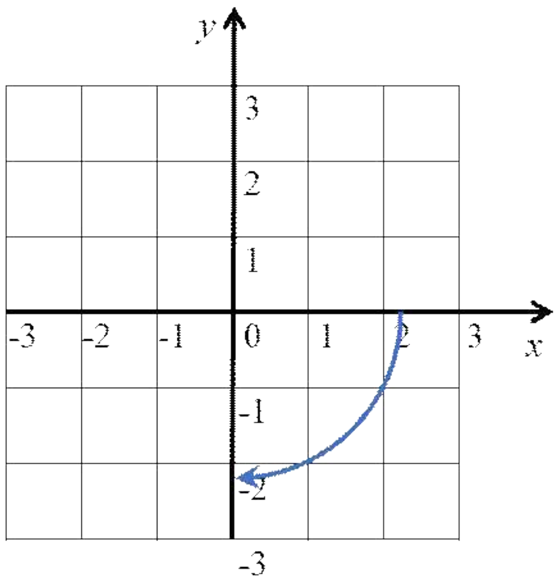
$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2(\sin^2 2\pi t+\cos^2 2\pi t)}\,dt=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}2\sqrt{5}\pi\,dt=\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$$

다른 풀이) 또한, $x = \sqrt{5}\cos 2\pi t$, $y = -\sqrt{5}\sin 2\pi t$이기 때문에, $x^2 + y^2 = 5$임이 성립하며, 원임을 알 수 있다. 따라서, 원주 $2\sqrt{5}\pi$에서 4로 나누어 준 값 $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$와 같다.

답 1) $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

풀이) $t = 0$일 때, $x = \sqrt{5}$, $y = 0$이며, $t = \frac{1}{4}$일 때, $x = 0$, $y = -\sqrt{5}$임을 알 수 있으며, 전기장은 아래 그림과 같이 진행함을 알 수 있다. 따라서 좌원편광임.



답 2) 좌원편광

(4) $A = 3$, $B = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때, 검출기에 그려진 곡선에서 1사분면에 위치한 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 M, N이라고 하자. 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고, 삼각형 OMN 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)
총 10점
- 접선의 방정식: 2점. 부분 점수 없음
- 넓이를 x_1, y_1로 정의 : 3점. 부분 점수 없음.
- 산술평균과 기하평균의 관계에 의한 최솟값: 5점. 부분 점수 없음.

풀이) $x = 3\cos 2\pi t$, $y = -2\sin 2\pi t$이기 때문에, $4x^2 + 9y^2 = 36$이므로 타원임을 알 수 있다. 따라서 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $4x_1 x + 9y_1 y = 36$이다.

답 1) $4x_1 x + 9y_1 y = 36$

풀이) x축, y축과 만나는 점을 각각 M, N은 $M\left(\frac{9}{x_1}, 0\right), N\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$이므로 삼각형 OMN 넓이 S는

$S = \frac{1}{2} \times \frac{9}{x_1} \times \frac{4}{y_1} = \frac{18}{x_1 y_1}$

점 P(x_1, y_1)이 타원 위의 점이므로, $4{x_1}^2 + 9{y_1}^2 = 36$이다. 이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 따라 $36 = 4{x_1}^2 + 9{y_1}^2 \geq 2\sqrt{4{x_1}^2 \times 9{y_1}^2} = 12x_1 y_1$ 이므로, $x_1 y_1 \leq 3$이다.
따라서, $S \geq 6$이기 때문에, 삼각형 OMN 넓이의 최솟값은 6이다.

답 2) 6

6 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 수학 I
	핵심개념 및 용어	확률분포, 조건부확률, 수열의 귀납적 정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 자료

문제 2 (30점)

어떤 게임에서 얻는 점수를 확률변수 X라 하면, n번째 시행 후 얻는 점수는 X_n이다. 이 게임의 점수 수열 $\{X_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

- 초기 점수 $X_0 = 0$이다.
- 매 시행마다 두 사건 A와 B 중 한 사건이 일어난다. n번째 시행의 사건을 각각 A_n, B_n이라고 하자.
- 수열 $\{X_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.
  - 사건 A_n이 일어나면 점수는 1만큼 증가하고, 사건 B_n이 일어나면 점수는 0으로 초기화된다. 즉,

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1}+1 & (\text{사건 } A_n \text{ 일어남}) \\ 0 & (\text{사건 } B_n \text{ 일어남}) \end{cases}$$

  - 사건 A_n과 B_n이 일어날 확률은 다음과 같다.
    - ▲ $(n-1)$번째 점수가 x인 사건$(X_{n-1}=x)$이 일어났을 때, 사건 A_n이 일어날 확률은 $\dfrac{1}{x+2}$ 이다. 즉,

$$\mathrm{P}(A_n | X_{n-1}=x) = \frac{1}{x+2}$$

    - ▲ $(n-1)$번째 점수가 x인 사건$(X_{n-1}=x)$이 일어났을 때, 사건 B_n이 일어날 확률은

$\frac{x+1}{x+2}$ 이다. 즉,

$$P(B_n | X_{n-1} = x) = \frac{x+1}{x+2}$$

※ 답안은 기약분수의 형태로 작성하시오.

(1) 확률변수 X_2의 확률분포를 표로 나타내시오.

(2) 3번째 시행 후 얻은 점수가 0일 확률 $P(X_3 = 0)$을 구하시오.

(3) 이 게임을 3번 시행하여 0점이 나온 사건을 C라 하자. 게임을 3번 시행하는 작업을 m번 독립적으로 반복할 때, 사건 C가 일어나는 횟수를 확률변수 Y라고 하자. $V(2Y+3)=280$일 때, m의 값을 구하시오.

(4) 문항 (3)의 확률변수 Y에 대하여, $2Y-3$이 a 이상일 확률이 0.5일 때, a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

3. 출제 의도

(1) 확률변수, 확률분포의 개념을 이해하고 활용할 수 있다.

(2) 조건부확률, 확률의 덧셈정리를 이해하고 활용할 수 있다.

(3) 이항분포, 정규분포의 개념과 관계를 이해하고 활용할 수 있다.

(4) 이산확률변수의 평균, 분산의 개념을 이해하고 활용할 수 있다.

(5) 고교 교육과정의 범위를 준수하고 그 내용을 충실히 반영하여, 수험생들이 이해하기 쉬운 수준으로 구성하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 기하, 확률과 통계
문항 및 제시문	교육과정 및 성취기준
제시문	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**

	[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. **[수학I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문항 (1)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포** [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (2)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용** [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (3)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포** [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문항 (4)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포** [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학1	김원경 외	비상	2020	145~147
	수학1	고성은 외	좋은책 신사고	2020	144~145
	확률과 통계	류희찬 외	천재 교과서	2021	59~52, 93~110
	확률과 통계	황선욱 외	미래앤	2021	58~61, 79~104
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2021	61~64, 81~107
	확률과 통계	김원경 외	비상	2020	53~56, 73~98

5. 문항 해설

(1) 확률분포의 개념을 이해하고, 조건부확률과 확률의 덧셈정리를 이용해 확률변수 X_2의 확률분포를 구할 수 있다.

(2) $X_3 = 0$의 확률은 (1)에서 구한 확률변수 X_2의 확률분포를 바탕으로 조건부확률과 확률의 덧셈정리를 이용하여 계산할 수 있다.

(3) 이항분포의 개념, 분산, 이산확률변수 $aX+b$의 분산을 이용하여 m을 구할 수 있다.

(4) 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 분산, 이항분포와 정규분포의 관계, 표준정규분포의 특성을 이용해 a를 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
(1)	X_1의 확률분포가 정확한 경우 (2점) $P(X_2=2)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) $P(X_2=1)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) $P(X_2=0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (3점) 확률분포표가 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(2)	1. [예시 답안] 방식으로 답을 제출한 경우: $P(X_3=0)$을 두 확률의 합으로 표현한 수식이 정확한 경우 (2점) $P(X_2=0)P(B_3 \vert X_2=0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_2\neq 0)P(B_3 \vert X_2\neq 0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (4점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점) 2. [다른 답안] 방식으로 답을 제출한 경우: $P(X_3=3)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3=2)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3=1)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3=0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(3)	확률변수 Y가 이항분포$\mathrm{B}\left(m, \frac{7}{12}\right)$을 따르는 것을 정확히 제시한 경우 (4점) $V(2Y-3)$의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (3점) m의 답이 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(4)	$E(2Y-3)$와 $V(2Y-3)$의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) n이 충분히 크다는 사실을 보이는 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) - 만약, 수식 없이 충분히 크다는 사실만 언급한 경우 (0점) 이항분포의 확률을 정규분포의 확률로 변환시키는 수식이 정확한 경우 (1점) $P(Z\geq 0)=0.5$ 의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) a의 답이 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	6

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) (8점)

우선 확률변수 X_1의 확률분포를 구하자. 확률변수 X_1가 가질 수 있는 값은 $0, 1$이고,

$P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X_1 = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2}$이므로

$$P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0)P(X_1 = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2}$$
$$P(X_1 = 1) = P(X_0 = 0)P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \frac{1}{2}$$

확률변수 X_2가 가질 수 있는 값은 $1, 2, 3$이다:

- $X_2 = 2$; $X_1 = 1$이고 $X_2 = 1$인 경우
  $$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
- $X_2 = 1$; $X_1 = 0$이고 $X_2 = 1$인 경우
  $$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
- $X_2 = 0$; $X_1 = 0$이고 $X_2 = 0$인 경우 또는 $X_1 = 1$이고 $X_2 = 0$인 경우

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0 | X_1 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0 | X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

즉, 확률변수 X_2의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2	0	1	2	합계
$P(X_2 = x)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) (8점)

$X_3 = 0$의 확률은 다음과 같이 생각해 볼 수 있다.

$$P(X_3 = 0) = P(X_2 = 0)P(X_3 = 0 | X_2 = 0) + P(X_2 \neq 0)P(X_3 = 0 | X_2 \neq 0)$$

$$P(X_2 = 0)P(X_3 = 0 | X_2 = 0) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$
$$P(X_2 \neq 0)P(X_3 = 0 | X_2 \neq 0) = P(X_2 = 1)P(X_3 = 0 | X_2 = 1) + P(X_2 = 2)P(X_3 = 0 | X_2 = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24}$$

$$\therefore P(X_3 = 0) = \frac{7}{24} + \frac{7}{24} = \frac{7}{12}$$

[다른 방법]

$P(X_3=3)=P(X_2=2)P(X_3=3|X_2=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

$P(X_3=2)=P(X_2=1)P(X_3=2|X_2=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

$P(X_3=1)=P(X_2=0)P(X_3=1|X_2=0)=\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{24}$

$\therefore P(X_3=0)=1-P(X_3=1)-P(X_3=2)-P(X_3=3)=1-\frac{7}{24}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=\frac{7}{12}$

(3) (8점)

한 번의 작업에서 사건 C가 일어날 확률은 $p=\mathrm{P}(X_3=0)=\frac{7}{12}$로 일정하므로, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(m,\frac{7}{12}\right)$를 따른다. $\mathrm{V}(2Y+3)=2^2\,\mathrm{V}(Y)=2^2\times m\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}=280$ 이므로

$m=288$이다.

(4) (6점)

$\mathrm{E}(Y)=288\times\frac{7}{12}=168$이므로, $\mathrm{E}(2Y-3)=2\mathrm{E}(Y)-3=333$, $\mathrm{V}(2Y-3)=280$이다.

$mp=288\times\frac{7}{12}=168\ge 5$이고 $m(1-p)=288\times\frac{5}{12}=120\ge 5$이므로 n은 충분히 크다.

그러므로 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하면

$$\mathrm{P}(2Y-3\ge a)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\ge\frac{a-333}{\sqrt{280}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$$

즉, 확률변수 $2Y-3$가 $a=333$ 이상일 확률이 0.5이다.

$\therefore a=333$

7 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

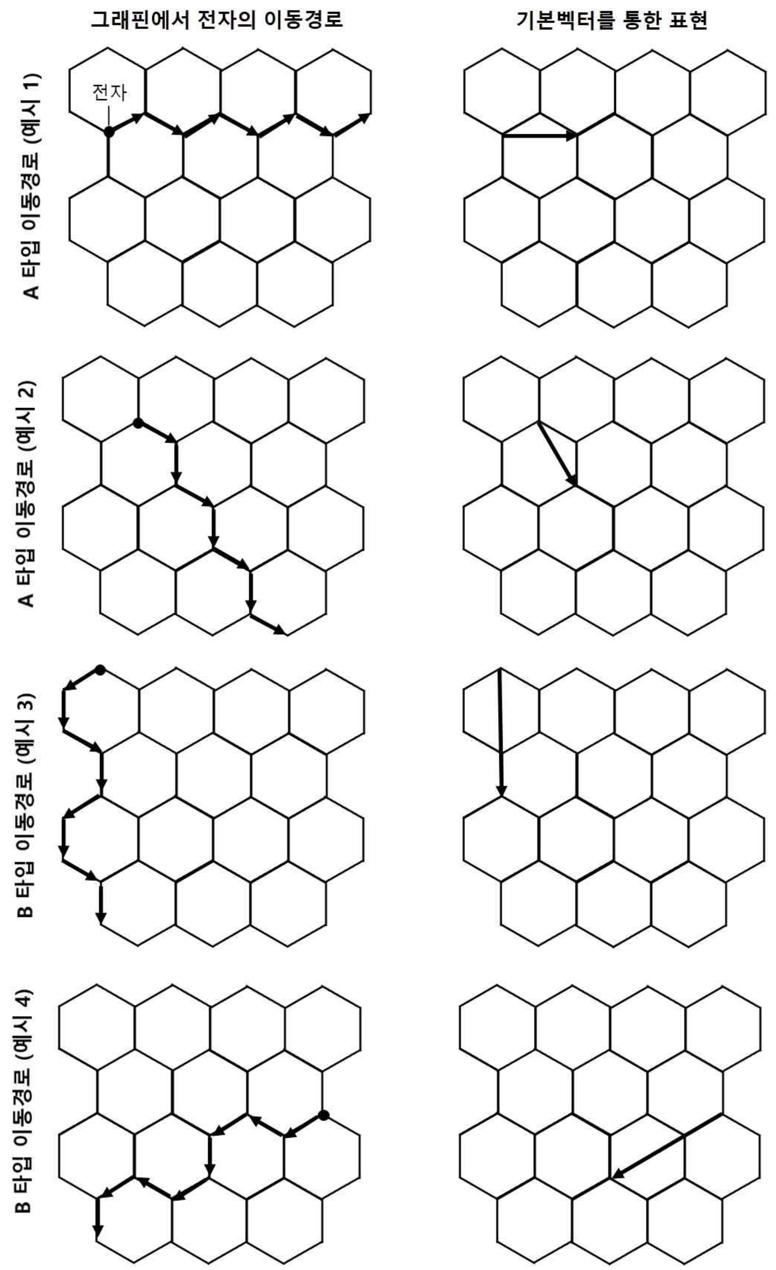
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	벡터의 연산, 위치벡터, 벡터의 성분과 내적
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분	

2. 문항 및 자료

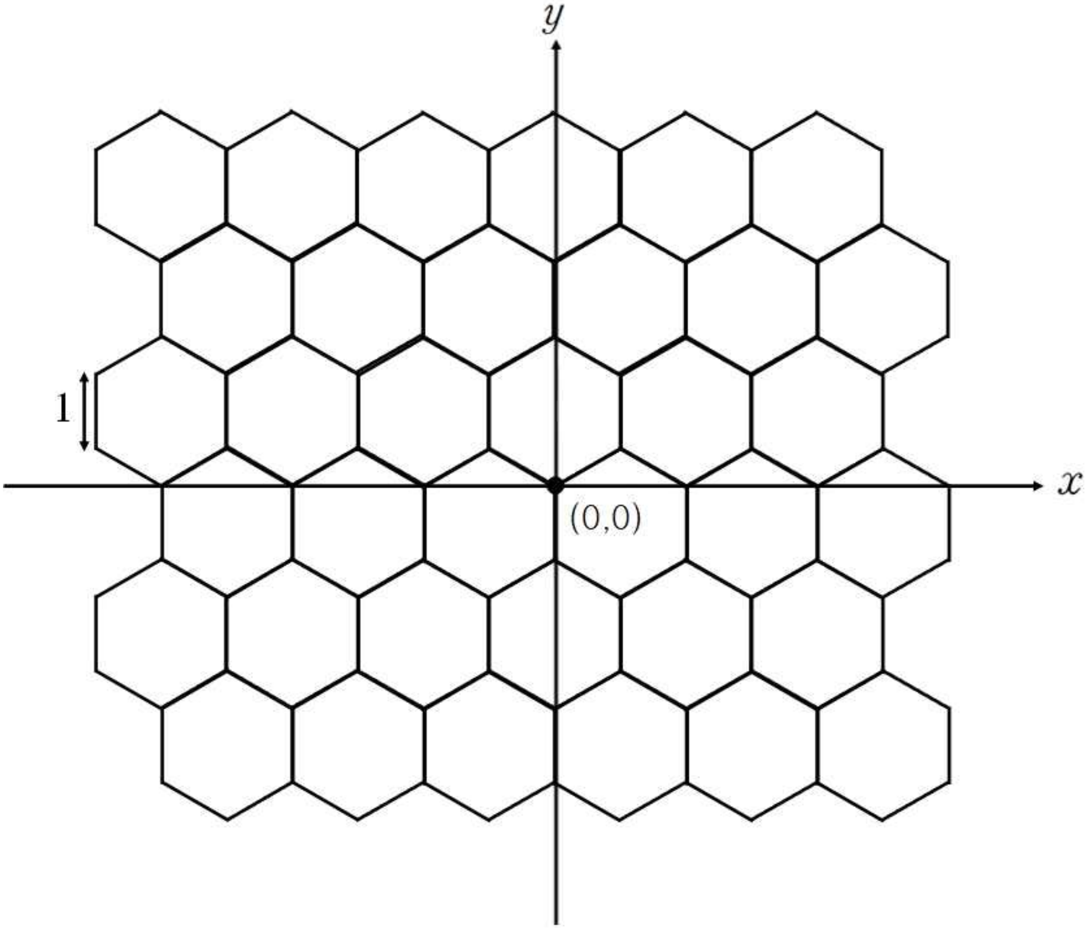
문제 3 (30점)

그래핀은 탄소 원자가 정육각형 형태로 무한히 반복되는 벌집모양의 격자구조를 갖는 물질이다. 그래핀의 격자 내 전자는 외부 전자기력에 의해 초기 위치로부터 A 타입 이동경로 (이하 A 경로) 또는 B 타입 이동경로 (이하 B 경로)를 따라 이동한다. 아래 그림은 그래핀 내에서 가능한 A 경로와 B 경로의 예시이며, 각각의 경로는 기본벡터를 사용하여 간략하게 나타낼 수 있다. 이때, 예시 1의 기본벡터와 크기가 같은 기본벡터를 갖는 경로를 'A 경로', 예시 3의 기본벡터와 크기가 같은 기본벡터를 갖는 경로를 'B 경로'로 정의한다. 전자는 초기 위치로부터 A 또는 B 경로만을 따라 이동하며, A 경로를 따라 이동하는 중 B 경로를 따라 이동할 수 없으며, B 경로를 따라 이동하는 중 A 경로를 따라 이동할 수 없다. (단, 외부 전자기력이 변화하면 경로변경 가능하다.)

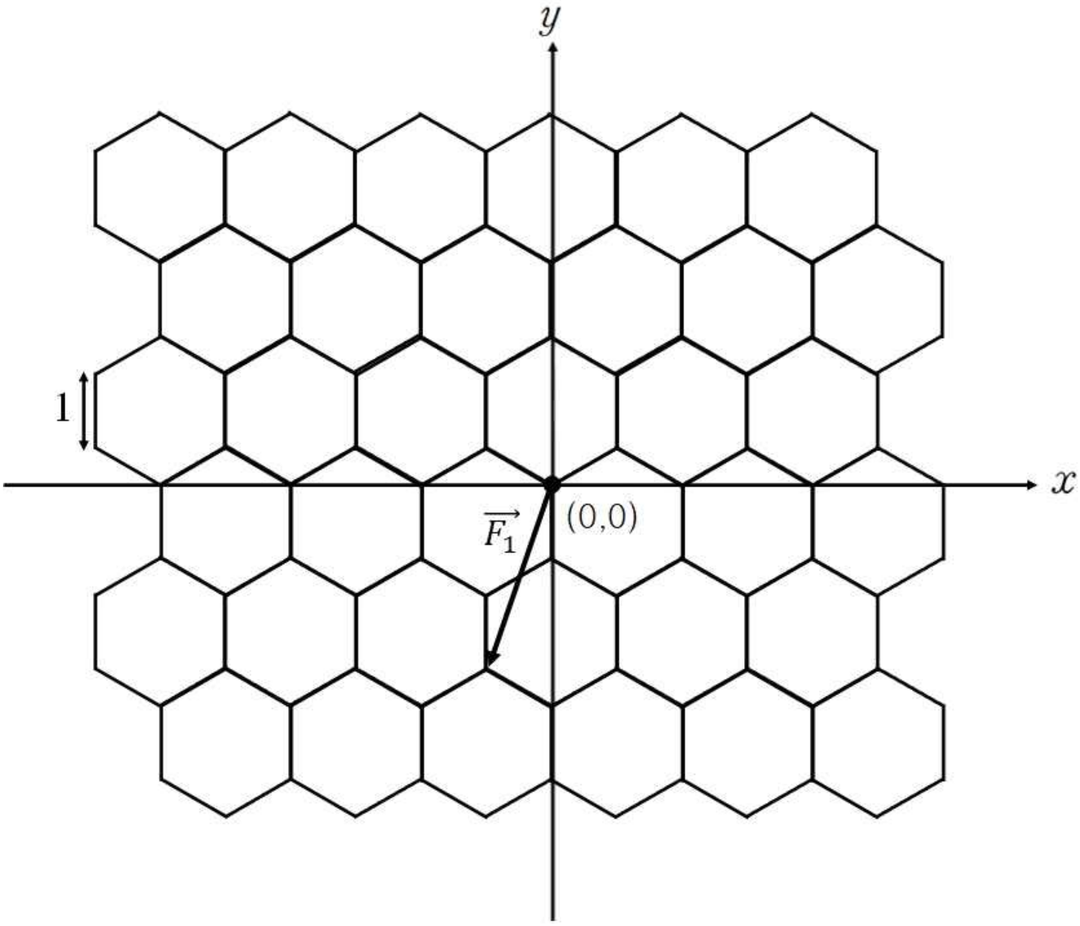


그래핀에서 전자의 이동경로
기본벡터를 통한 표현
A 타입 이동경로 (예시 1)
전자
A 타입 이동경로 (예시 2)
B 타입 이동경로 (예시 3)
B 타입 이동경로 (예시 4)

(1) 아래의 그래핀 격자 내 전자의 초기 위치를 (0, 0)이라고 할 때, 임의의 외부 전자기력에 대하여 해당 전자가 가질 수 있는 모든 이동경로에 대한 12개의 기본벡터들을 성분으로 나타내시오. 또한, 12개의 기본벡터들을 취하는 경로들이 A인지 B인지 각각 구분하시오. (아래 좌표평면에서 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.)



(2) 전자는 그래핀 격자 내에서 기본벡터 $\vec{u}$와 전자기력 벡터 $\vec{F}$의 내적 $\vec{u}\cdot\vec{F}>0$이면서, $\vec{u}\cdot\vec{F}$가 최소인 경로를 따라 이동한다. 아래 그림과 같이 전자기력 벡터 $\overrightarrow{F_1}$을 가해 주었을 때, 전자는 문항 (1)에서 도출한 기본벡터들 중, 어떠한 기본벡터를 갖는 경로로 이동할지 그 성분을 나타내시오. 또한, 해당 기본벡터와 $\overrightarrow{F_1}$의 내적을 구하시오. (단, A 경로와 B 경로의 기본벡터들과 $\overrightarrow{F_1}$의 내적이 동일한 경우, 전자는 A 경로로 이동한다.)



(3) 문항 (2)에서 전자기력 벡터 $\overrightarrow{F_1}$을 $\overrightarrow{F_2}=3\overrightarrow{F_1}+(\sqrt{3}k,0)$로 변화시켰다. 이때, 전자의 이동이 문항 (2)에서 도출된 경로로부터 반대 경로로 변경되는 양의 정수 k의 최솟값을 구하시오. (단, 반대 경로란 방향이 반대인 기본벡터 $-\vec{u}$ 를 갖는 경로를 의미한다.)

3. 출제 의도

(1) 위치벡터의 크기를 이해할 수 있다.

(2) 평면벡터의 성분을 구할 수 있다.

(3) 평면벡터의 성분을 연산할 수 있다.

(4) 평면벡터 사이의 내적을 구할 수 있다.

(5) 내적의 부호에 따른 평면벡터 사이의 위치관계를 파악할 수 있다.

(6) 고교 교육과정의 범위를 준수하고 그 내용을 충실히 반영하여, 수험생들이 이해하기 쉬운 수준으로 구성하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	교육과정 및 성취기준
제시문	**[기하] - (2) 평면벡터 - ① 벡터의 연산** [12기하02-01] 벡터의 뜻을 안다. [12기하02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
문항 (1)	**[기하] - (2) 평면벡터 - ① 벡터의 연산** [12기하02-01] 벡터의 뜻을 안다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (2)	**[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항 (3)	**[기하] - (2) 평면벡터 - ① 벡터의 연산** [12기하02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	김원경 외	비상	2021	55~86
	기하	류희찬 외	천재 교과서	2021	62~92

5. 문항 해설

(1) 위치벡터의 개념과 크기를 이해하고, 이를 통하여 평면벡터 $\vec{u}$ 의 성분을 구할 수 있다.

(2) 평면벡터 $\vec{u}$ 와 평면벡터 $\overrightarrow{F_1}$의 내적을 구할 수 있다.

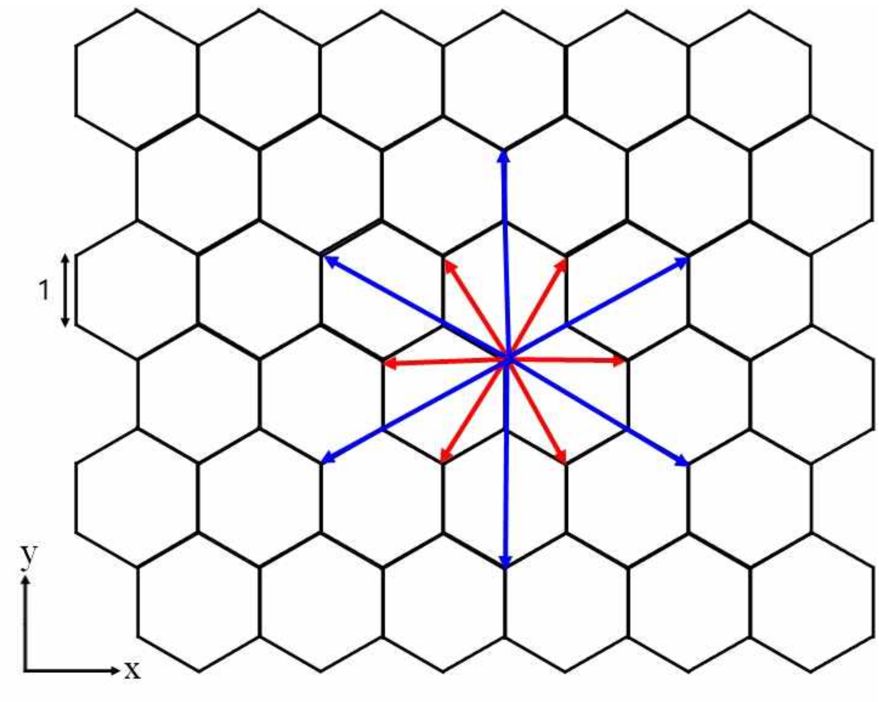
(3) 평면벡터 $\overrightarrow{F_1}$을 바탕으로 $\overrightarrow{F_2} = 3\overrightarrow{F_1} + (\sqrt{3}k, 0)$의 성분을 구한 후, $-\vec{u}$ 와의 내적을 통하여 $\overrightarrow{F_2}$와 $-\vec{u}$ 과의 위치관계를 파악할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
(1)	1. 6개 기본벡터들의 좌표를 모두 정확하게 적고, A 경로 B 경로 구분을 모두 정확하게 한 경우 (5점) 2. 나머지 6개 기본벡터들의 좌표를 모두 정확하게 적고, A 경로 B 경로 구분을 모두 정확하게 한 경우 (5점)	10
(2)	1. $\vec{u} \cdot \vec{F_1} > 0$ 조건을 만족하면서 내적이 최소인 기본벡터 $\vec{u}$ 두 개 모두 정확하게 적고, A 경로인지 B 경로 인지 정확하게 명시한 경우 (4점) 2. 이동경로에 대한 기본벡터를 정확하게 명시한 경우 (3점) 3. 내적값을 정확하게 적은 경우 (3점)	10
(3)	1. $\vec{F_2}$의 성분벡터를 k에 대하여 정확하게 구한 경우 (2점) 2. k의 최솟값을 정확하게 구한 경우 (6점) 3. $\vec{F_2}$ 와 $-\vec{u}$ 와의 내적을 통하여 k의 최솟값 도출과정을 적은 경우 (2점)	10

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 문항 (1)에서 주어진 좌표평면상에서 전자의 초기 위치 (0,0)으로부터 가능한 모든 A 경로와 B 경로들을 해당 기본벡터들로 표시하면 아래 그림과 같다.



해당 12개 기본벡터들의 성분을 3시 방향으로부터 반시계 방향으로 구하면 아래와 같다.

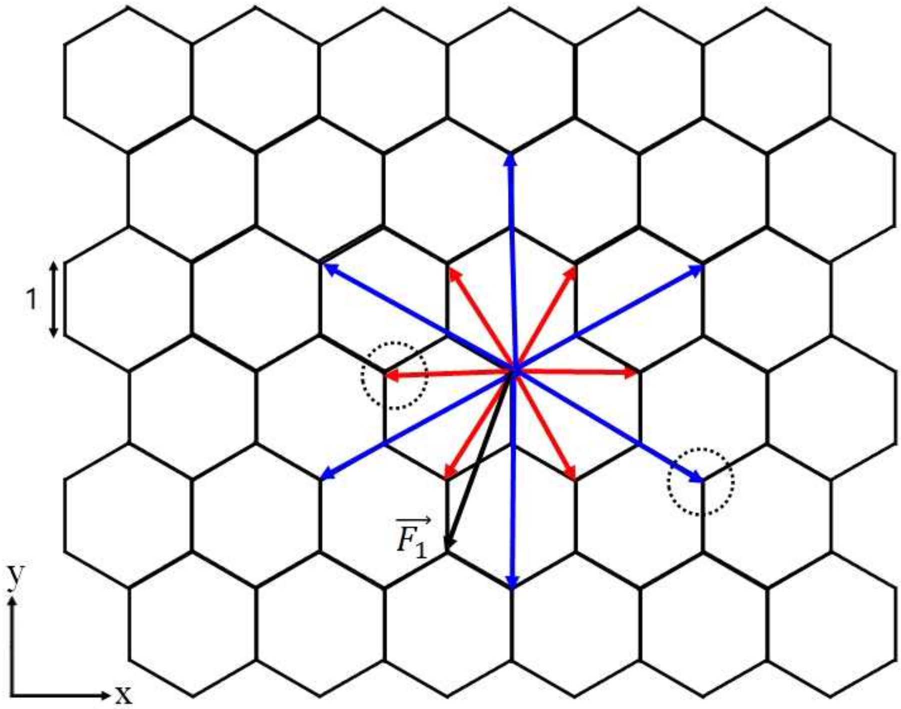
$(\sqrt{3},0)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(0,3)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(-\sqrt{3},0)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $(0,-3)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$

이 때, A 경로 기본벡터와 B 경로 기본벡터를 구분하면,

A 경로 기본벡터:$(\sqrt{3},0)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(-\sqrt{3},0)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$

B 경로 기본벡터: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(0,3)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $(0,-3)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$

(2) 좌표평면상에서 $\overrightarrow{F_1}$ 의 성분은 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$이며, 이를 문항 (1)로부터 도출한 기본벡터들과 함께 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



$\vec{u}\cdot\vec{F}>0$조건을 만족하면서 내적이 최소인 기본벡터 $\vec{u}$는 $(-\sqrt{3},0)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$이다. (위의 그림에서 점선 동그라미로 표시) 이중 전자는 A 경로를 따르므로 $(-\sqrt{3},0)$의 기본벡터를 따라 이동한다. 또한 $\vec{u}\cdot\overrightarrow{F_1}=(-\sqrt{3},0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 이다.

(3) 좌표평면상에서 $\overrightarrow{F_2}=\ 3\overrightarrow{F_1}+(\sqrt{3}k,0)=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)+(\sqrt{3}k,0)\ =\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}k,\ -\frac{15}{2}\right)$

문항 (2)에서 도출된 $\vec{u}\ =(-\sqrt{3},0)$와 방향이 반대인 기본벡터 $-\vec{u}$ 의 성분은 $(\sqrt{3},0)$이다.

이때, $(-\vec{u})\cdot\overrightarrow{F_2}=(\sqrt{3},0)\ \cdot\ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}k,\ -\frac{15}{2}\right)=-\frac{9}{2}+3k$ 이다.

$k=1$ 일 때, $(-\vec{u})\cdot\overrightarrow{F_2}\ =\ -\frac{3}{2}$ 이므로 문항 (2)의 $\vec{u}\cdot\vec{F}>0$조건을 만족하지 않아 경로 변경이 불가능하다.

$k=2$ 일 때, $(-\vec{u})\cdot\overrightarrow{F_2}=\frac{3}{2}$ 이므로 문항 (2)의 $\vec{u}\cdot\vec{F}>0$조건을 만족한다.

$k=2$ 일 때, 문항 (1)에서 도출한 나머지 기본벡터들과 $\overrightarrow{F_2}\ =\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)$의 내적을 계산하면 아래와 같다.

우선, $\vec{u}\cdot\vec{F}>0$ 인 조건을 고려하면, 두 벡터 $\vec{u},\vec{F}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0^\circ\ \le\theta\le 180^\circ)$일 때 $\theta<90^\circ$ 인 경우만 고려하면 된다. 이 경우,

$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2}\ =\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)=9$

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{F}$ 〉 0 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2}\ =\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)=\frac{21}{2}$

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{F}$ 〉 0 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$(0,-3)\cdot\overrightarrow{F_2}\ =(0,-3)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)=\frac{45}{2}$

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{F}$ 〉 0 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2}\ =\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)=12$

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{F}$ 〉 0 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2}\ =\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{15}{2}\right)=\frac{27}{2}$

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{F}$ 〉 0 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

따라서 $k=2$ 일 때, 전자는 문항 (2)에서 도출된 경로의 반대경로로 이동하며, 해당 경로의 단위벡터 성분은 $(\sqrt{3},0)$이다.