세종대학교 2025학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제1]

(1-1) $f(x)-x-1=k(x+1)^2(x-2)^2$으로부터 $f'(x)=1+2k\{(x+1)(x-2)(2x-1)\}$이고
따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$이다.

(1-2) $f(0)=1+4k<0$에서 $k<0$이다. $f''(x)=6k(2x^2-2x-1)$이므로 함수 $f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 부등식 $2x^2-2x-1<0$을 풀면 얻을 수 있다. 이 부등식을 풀면 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.

(1-3) $f(x)=(x+1)\{1+k(x+1)(x-2)^2\}$이고 $g(x)=1+k(x+1)(x-2)^2$이라 두면
$g(-1)=g(2)=1$, $g(0)=g(3)=1+4k<0$이므로 사잇값 정리로부터 $g(x)=0$의 세 근을
α, β, γ라 하면,

$$-1<\alpha<0,\ \ 0<\beta<2,\ \ 2<\gamma<3$$

임을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=0$의 네 근 $-1, \alpha, \beta, \gamma$가 모두 3보다 작다.

[문제2]

(2-1) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 개형을 생각하면, 조건 (가)에서 방정식 $g(t)=t$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 점 $(t, f(t))$가 $f(x)$의 변곡점일 때이다. 즉, $f(x)$의 변곡점이 $(2, f(2))$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 할 때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f''(2)=12+2a=0$에서 $a=-6$을 얻는다. 이 때 $f''(x)=6x-12$이고 $x=2$를 경계로 이계도함수의 부호가 바뀌므로 $(2, f(2))$는 $f(x)$의 변곡점이다. 따라서 $f''(1)=6-12=-6$이다.

(2-2) $f(x)=x^3-6x^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2-12x+b$이므로, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=(3t^2-12t+b)(x-t)+t^3-6t^2+bt+c$$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는 다음 방정식을 풀면 나온다.

$$(3t^2-12t+b)(x-t)+t^3-6t^2+bt+c=x^3-6x^2+bx+c$$

이를 간단히 하면 다음과 같다.

$$x^3-6x^2-(3t^2-12t)x+2t^3-6t^2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

그러므로 이 방정식의 근 x 중에서 가장 큰 것이 $g(t)$이다. 그런데 $x=t$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$에 접하므로 방정식 (1)은 $x=t$에서 중근을 갖는다. 즉, 식 (1)의 좌변은 $(x-t)^2$을 인수로 갖는다. 그러므로 조립제법을 사용하여 인수분해하여 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(x-t)^2(x+2t-6)=0$$

따라서 $t<2$일 때 $g(t)=6-2t$이다.

세종대학교 2025학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[별해] $x=t$에서 $y=f(x)$의 접선을 $y=L(x)=\alpha x+\beta$라 하면

$x^3-6x^2+bx+c=f(x)=(x-t)^2(x-g(t))+L(x)=x^3-(2t+g(t))x^2+(t^2+2tg(t)+\alpha)x+\beta-t^2g(t)$

로부터 $g(t)=6-2t$를 얻는다.

(2-3) $g(t)=\begin{cases}6-2t & (t\le 2)\\ t & (t\ge 2)\end{cases}$이므로 $g(t)$는 연속함수이고 $t=2$일 때만 미분불가능하다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키려면, 즉 함수 $h(t)=f(g(t))$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(t)$가 $t=2$일 때 미분가능하면 된다. 함수 $h(t)$의 $t=2$에서의 좌미분계수는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2-}\frac{h(t)-h(2)}{t-2}&=\lim_{t\to 2-}\frac{f(6-2t)-f(2)}{t-2}\\&=\lim_{t\to 2-}\frac{f(6-2t)-f(2)}{(6-2t)-2}\times\frac{(6-2t)-2}{t-2}\\&=\lim_{s\to 2+}\frac{f(s)-f(2)}{s-2}\times(-2)\ (\Leftarrow s=6-2t)\\&=-2f'(2)\\&=24-2b\end{aligned}$$

이고, 우미분계수는

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2+}\frac{h(t)-h(2)}{t-2}&=\lim_{t\to 2+}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\\&=f'(2)\\&=b-12\end{aligned}$$

이므로 좌미분계수와 우미분계수가 같아지려면

$$24-2b=b-12$$

에서 $b=12$이다. 그러므로 $f(x)=x^3-6x^2+12x+c$이다. 또한 이 때 $h'(2)=0$이 된다. 따라서 $h'(t)$는 다음과 같다.

$$h'(t)=\begin{cases}-2f'(6-2t) & (t<2)\\ 0 & (t=2)\\ f'(t) & (t>2)\end{cases}$$

그러므로 $t\neq 2$일 때 $h'(t)$가 연속인 것은 자명하고,

$$\lim_{t\to 2-}h'(t)=-2f'(2)=0=h'(2),$$

$$\lim_{t\to 2+}h'(t)=f'(2)=0=h'(2)$$

이므로 $\lim_{t\to 2}h'(t)=h'(2)$가 되어 $h'(t)$는 $t=2$에서도 연속이다. 따라서 $h'(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이제 $f(x)=x^3-6x^2+12x+c$이고 $t\le 2$일 때 $g(t)=6-2t$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\int_1^2 h'(x)\,dx=h(2)-h(1)=f(g(2))-f(g(1))=f(2)-f(4)=-8$$

[문제3]

세종대학교 2025학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

(3-1) $g(4x) = g(g(g(x))) = 4g(x)$이므로 $g(0) = 4g(0)$이다. 따라서 $g(0) = 0$이다.

(3-2) $g(g(x)) = 4x$의 양변을 미분하면 $g'(g(x))g'(x) = 4$이다.
따라서 $g'(g(0))g'(0) = 4$에서 $g'(0)g'(0) = 4$이다.
한편 $g'(x) = f(x)$이므로 $\{f(0)\}^2 = 4$이고, $f(0) > 0$ 에서 $f(0) = 2$이다.

(3-3) $g(4x) = 4g(x)$의 양변을 미분하면 $g'(4x) = g'(x)$이므로 $f(4x) = f(x)$이다.
또한 $f(x) = f\left(\frac{1}{4}x\right)$에서 $f(x) = f\left(\frac{1}{4^n}x\right)$이다.
따라서 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{4^n}x\right)$인데, 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{4^n}x\right) = f(0) = 2$ 이다.
$g(x) = \int_a^x 2\,dt = 2(x-a)$이고 $g(0) = 0$이므로 $a = 0$이다.