2019학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

출제위원장	(인)		
출제위원	(인)	출제위원	(인)
출제위원	(인)	출제위원	(인)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 100점)
함수
$$f(x)=x^4+(6a+2)x^3+(11a^2+10a+1)x^2+(6a^3+14a^2+4a)x+3a^3+5a^2+a$$
에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a는 상수이다.)
(a) $f(x)=(x^2+Ax+3a^2+5a+1)(x^2+Bx+a)$를 만족시키는 A, B를 a를 사용하여 나타내어라. (20점)
(b) 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_a라 할 때 집합 $\{a|m_a \geq 0\}$을 구하여라. (80점)

[예시답안]
(a) 항등식
$$(x^2+Ax+3a^2+5a+1)(x^2+Bx+a) = x^4+(6a+2)x^3+(11a^2+10a+1)x^2+(6a^3+14a^2+4a)x+3a^3+5a^2+a$$
에서 이차항의 계수를 비교하면 $a+AB+3a^2+5a+1=11a^2+10a+1$이므로
$$AB=(11a^2+10a+1)-a-(3a^2+5a+1)=8a^2+4a \quad \cdots\cdots \quad ㉠$$
이다. 삼차항의 계수를 비교하면
$$A+B=6a+2 \quad \cdots\cdots \quad ㉡$$
이다. 따라서 ㉠과 ㉡에 의해 $B(6a+2)=BA+B^2=8a^2+4a+B^2$이다. 즉,
$$B^2-(6a+2)B+8a^2+4a=0$$
이므로 $B=2a$ 또는 $B=4a+2$이다. ㉡에 의해 $A=2a$, $B=4a+2$이거나 $A=4a+2$, $B=2a$인데, $A=4a+2$이고 $B=2a$인 경우에만 주어진 등식을 만족시킨다. 그러므로
$$A=4a+2,\ B=2a$$
이다.

(b) (a)에 의해 $f(x)=(x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1)(x^2+2ax+a)$이므로
$$p(x)=x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1, \quad q(x)=x^2+2ax+a$$
라 하자.
$m_a \geq 0$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $p(x)$와 $q(x)$의 부호는 서로 같아야만 한다. 이제 두 이차방정식 $p(x)=0$, $q(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면 $\frac{D_1}{4}=\frac{D_2}{4}=a^2-a$이다.
(i) $a^2-a \leq 0$인 경우
모든 실수 x에 대하여 $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$이다. 따라서 $0 \leq a \leq 1$이다.
(ii) $a^2-a>0$인 경우
두 방정식 $p(x)=0$, $q(x)=0$이 각각 서로 다른 두 실근을 가지므로, 두 부등식 $p(x) \leq 0$, $q(x) \leq 0$을 만족시키는 해의 범위가 같을 때에만 $f(x)=p(x)q(x) \geq 0$이다. 그런데 $p(x)$와 $q(x)$의 이차항의 계수가 모두 1이므로 $p(x)=q(x)$, 즉 $4a+2=2a$와 $3a^2+5a+1=a$이다. 따라서 $a=-1$이다.
그러므로 (i)과 (ii)에 의해 $\{a\,|\,m_a \geq 0\}=\{a\,|\,a=-1$ 또는 $0 \leq a \leq 1\}$이다.

[문제 2] (100점)
3개의 당첨 제비를 포함하여 $2n$개의 제비가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 A, B 두 사람이 A부터 시작하여 A와 B가 교대로 제비를 한 개씩 임의로 뽑는다. 당첨 제비가 처음 나오면 이 시행을 멈추기로 할 때, A가 당첨 제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, n은 1보다 큰 자연수이고, 꺼낸 제비는 상자 안에 다시 넣지 않는다.)

[예시답안]
A는 최대 $n-1$회까지 제비를 뽑을 수 있다. 당첨 제비를 ○, 비당첨 제비를 ×로 나타내면 A가 당첨 제비를 뽑는 경우와 확률은 다음 표와 같다.

횟수	A	B	A	B	A	⋯	A	B	A	확률
1	○									$\frac{3}{2n}$
2	×	×	○							$\frac{2n-3}{2n}\times\frac{2n-4}{2n-1}\times\frac{3}{2n-2}=\frac{3(n-2)(2n-3)}{2n(n-1)(2n-1)}$
3	×	×	×	×	○					$\frac{2n-3}{2n}\times\frac{2n-4}{2n-1}\times\frac{2n-5}{2n-2}\times\frac{2n-6}{2n-3}\times\frac{3}{2n-4}=\frac{3(n-3)(2n-5)}{2n(n-1)(2n-1)}$
	⋮									⋮
$n-1$	×	×	×	×	×	⋯	×	×	○	$\frac{2n-3}{2n}\times\frac{2n-4}{2n-1}\times\cdots\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2n(n-1)(2n-1)}$

A가 $k(1\le k\le n-1)$번 만에 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(n-1)(2n-1)}$$

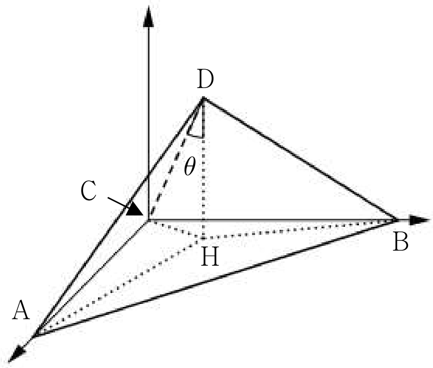
이다. 따라서 A가 당첨제비를 뽑을 확률 p는

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{3(n-k)(2n-2k+1)}{2n(n-1)(2n-1)}\right\} \\ &= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\{2k^2-(4n+1)k+n(2n+1)\} \\ &= \frac{4n+1}{4(2n-1)} \end{aligned}$$

이다.

[문제 3] (100점)
사면체 ABCD가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) $\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{2}$
(2) $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}} = 5$, $\overline{\mathrm{CD}} = 4$



평면 ABC의 법선벡터와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. B b를 사용하여 나타내어라.

[예시답안]
그림과 같이 사면체 ABCD를 점 C가 원점, 반직선 CA가 x축의 양의 방향, 반직선 CB가 y축의 양의 방향이 되도록 공간좌표에 놓고, 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x, y, 0)$이라고 하자. 이때 $\mathrm{A}(b, 0, 0)$이고 $\mathrm{B}(0, a, 0)$이다.

직각삼각형 CDH에서 $\angle \mathrm{CDH} = \theta$이므로 $\overline{\mathrm{CH}} = 4\sin\theta$이고
$\overline{\mathrm{DH}} = 4\cos\theta$이다. 한편 $\overline{\mathrm{CH}}^2 = x^2 + y^2$이므로

$$x^2 + y^2 = 16\sin^2\theta \qquad \cdots\cdots \qquad ㉠$$

이다. $\overline{\mathrm{AH}}^2 = (x-b)^2 + y^2$, $\angle \mathrm{DHA}$가 직각이므로

$$(x-b)^2 + y^2 = 25 - 16\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots \qquad ㉡$$

이다. $\overline{\mathrm{BH}}^2 = x^2 + (y-a)^2$이고 $\angle \mathrm{DHB}$가 직각이므로

$$x^2 + (y-a)^2 = 25 - 16\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots \qquad ㉢$$

이다.

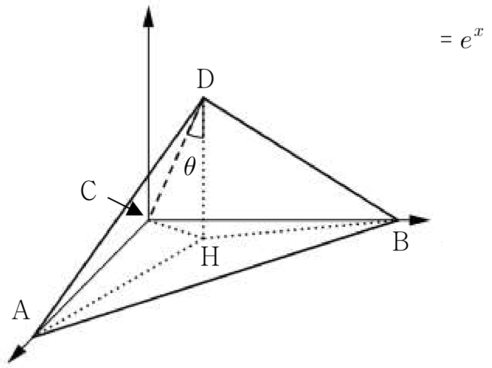
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $x = \dfrac{b^2-9}{2b}$이고, ㉠과 ㉢을 연립하여 풀면 $y = \dfrac{a^2-9}{2a}$이다.

따라서 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(\dfrac{b^2-9}{2b}, \dfrac{a^2-9}{2a}, 4\cos\theta\right)$이고, $\overline{\mathrm{CD}}^2 = 16$이므로

$$\left(\frac{b^2-9}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a^2-9}{2a}\right)^2 + 16\cos^2\theta = 16$$

이다. 그러므로 $\cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{a^2-9}{8a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2-9}{8b}\right)^2$이다.

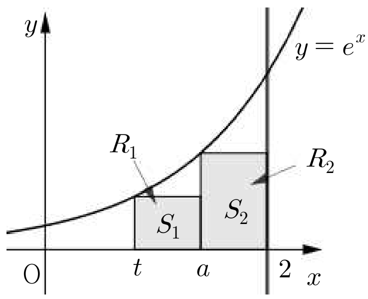
[문제 4] (100점)



그림과 같이 곡선 $y=e^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역에 한 변이 x축에 있고 내부가 서로 겹치지 않는 두 직사각형이 있다. 두 직사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 최댓값을 구하여라.

[예시답안]

그림과 같이 두 직사각형 R_1, R_2가 한 변에서 맞닿아 있고, 직사각형 R_2의 오른쪽 변이 직선 $x=2$에 있으며, 각 직사각형의 한 꼭짓점이 곡선 $y=e^x$에 있을 때 두 직사각형 넓이의 합이 최대가 될 수 있다.



$0<a<2$인 실수 a에 대하여 두 직사각형이 직선 $x=a$에서 맞닿아 있다고 가정하자. R_1의 왼쪽 변이 놓인 직선의 x좌표를 $t(0\le t<a)$라 하면 $S_1=(a-t)e^t$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를 $f(x)=(a-x)e^x$이라 하자.

그러면 $f'(x)=(-1+a-x)e^x$이고 $f'(x)=0$의 해는 $x=a-1$이다.

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	최대	$\searrow$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(a-1)=e^{a-1}$이므로 $S_1\le e^{a-1}$이다. 한편 $S_2=(2-a)e^a$이므로

$$S_1+S_2\le e^{a-1}+(2-a)e^a=e^a\left(2+\frac{1}{e}-a\right)$$

이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를 $g(x)=e^x\left(2+\frac{1}{e}-x\right)$라 하자. 그러면 $g'(x)=e^x\left(1+\frac{1}{e}-x\right)$이고 $g'(x)=0$의 해는 $x=1+\frac{1}{e}$이다.

x	$\cdots$	$1+\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	최대	$\searrow$

따라서 $g(x)$의 최댓값은 $g\left(1+\frac{1}{e}\right)=e^{1+\frac{1}{e}}$이므로

$$S_1+S_2\le e^{1+\frac{1}{e}}$$

이다. 한편 R_1의 왼쪽 변이 직선 $x=\frac{1}{e}$에 있고, R_2의 왼쪽 변이 직선 $x=1+\frac{1}{e}\left(0<1+\frac{1}{e}<2\right)$에 있을 때,

$$S_1+S_2=\left(1+\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)e^{\frac{1}{e}}+\left\{2-\left(1+\frac{1}{e}\right)\right\}e^{1+\frac{1}{e}}=e^{1+\frac{1}{e}}$$

이다. 그러므로 S_1+S_2의 최댓값은 $e^{1+\frac{1}{e}}$이다.