2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술우수자</td></tr>
<tr><td rowspan="2">해당 대학의 계열(과목)</td><td rowspan="2">자연계열</td><td rowspan="2">문항번호</td><td>□ 오전 ■ 오후</td></tr>
<tr><td>■ 1번 □ 2번 □ 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td colspan="2">미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">정적분, 치환적분법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="3">(40) 분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

정적분의 계산 능력을 평가한다. 특히 주어진 적분 형태에 대해서 적절한 치환적분법을 적용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">□ 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
□ 수학 □ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>[12미적03-01]</td><td>치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>[12미적03-03]</td><td>여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 제시문
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	168	(가)
미적분	이준열 외	천재교육	2020	151	(가)
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	166	(나)
미적분	이준열 외	천재교육	2020	150	(나)

5. 문항 해설

(1-1) 정적분의 치환적분법을 활용하여 주어진 정적분의 값을 계산할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(1-2) 정적분의 치환적분법과 삼각함수의 특징을 활용하여 주어진 식을 증명할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(1-3) (1-2)에서 증명한 등식을 활용하여 정적분의 값을 계산할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	정적분의 값을 정확하게 계산하면	5점
(1-2)	$u=\pi-x$로 치환하여 식을 변형하면	3점
	주어진 등식을 증명하면	7점
(1-3)	(1-2)와 대칭성을 이용하여 적분 형태를 단순화하면	5점
	주어진 정적분의 값을 정확하게 계산하면	10점

7. 예시 답안

(1-1) $u=\pi-x$라 하면 제시문 (가)를 이용하여 치환적분법을 적용하고, 삼각함수의 성질을 활용하면

$$\int_0^{\pi}\left((x-\pi)^8+(x-\pi)^2+\sin^3 x\right)dx=-\int_{\pi}^{0}\left(u^8+u^2+\sin^3(\pi-u)\right)du$$

$$=\int_0^{\pi}\left(u^8+u^2+(1-\cos^2 u)\sin u\right)du=\int_0^{\pi}\left(u^8+u^2+\sin u\right)du-\int_0^{\pi}\sin u\cos^2 u\,du$$

를 얻는다. 여기서 변수 $y=\cos u$에 대해서 제시문 (가)의 치환적분법을 적용하면 $\int_0^{\pi}\sin u\cos^2 u\,du=\int_{-1}^{1}y^2\,dy$가 된다. 따라서 주어진 적분값은

$$\left[\frac{u^9}{9}+\frac{u^3}{3}-\cos u\right]_0^{\pi}-\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi^9}{9}+\frac{\pi^3}{3}+\frac{4}{3}$$

(1-2) $u=\pi-x$라 하면, 제시문 (가)의 치환적분법에 의해

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin(\pi-u))\,du=\pi\int_0^{\pi}f(\sin u)\,du-\int_0^{\pi}uf(\sin u)\,du$$

이고 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$를 얻는다.

(1-3) 닫힌구간 $[-\pi,\pi]$에서 함수의 대칭성을 이용하면,

$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+1)\sin^3 x}{2-\cos^2 x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos^2 x}dx=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}dx$이다. (1-2)에서 증명한 식과 제시문 (가)의 치환적분법을 이용하면,

$$2\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{2-\cos^2 x}\sin x\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{2-u^2}\,du$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{2-u^2}\right)du=2\pi-\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\sqrt{2}+u)(\sqrt{2}-u)}\,du=2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)du$$

을 얻는다. 여기서 제시문 (나)에 의해

$$2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)du=2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\ln|\sqrt{2}+u|-\ln|\sqrt{2}-u|\right]_{-1}^{1}=2\pi-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})$$

이다.

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후 □ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분	
	핵심개념 및 용어	두 직선의 수직 조건, 함수의 최솟값, 음함수의 미분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

거리를 나타내는 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하며, 음함수의 미분을 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II ■ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	**관련 제시문**	**성취기준**	**과목명: (수학, 수학II, 미적분)**
	(가)	[10수학02-04]	두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
		[10수학02-01]	두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	(나)	[12미적02-09]	음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
		[12미적02-11]	접선의 방정식을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 제시문
수학	홍성복 외	지학사	2020	133	(가)
수학	김원경 외	비상교육	2020	118	(가)
미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	88	(나)
미적분	이준열 외	천재교육	2020	98	(나)

5. 문항 해설

(2-1) 그래프 위의 점과 주어진 점과의 거리를 함수로 나타내고, 이 함수의 최솟값을 미분을 이용하여 구하는 문제이다.

(2-2) 음함수의 미분법을 활용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2-3) $\overline{PQ}+\overline{PR}$이 최소가 되는 점 P의 위치를 파악한 후, $\overline{PQ}+\overline{PR}$을 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	곡선 $y=x^2$ 위의 점과 점 $(-5,-1)$ 사이의 거리를 식으로 나타내면	3점
	미분계수가 0이 되는 점에서 최솟값을 가짐을 서술하면	2점
	$(-1,1)$을 구하면	5점
(2-2)	거리가 최소가 되는 조건을 서술하면	2점
	점 P, Q의 좌표의 관계를 찾으면	3점
	음함수의 미분을 활용하여 관련된 미분계수의 값들을 구하면	6점
	$d'(-4)=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$를 구하면	4점
(2-3)	직선 PR이 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심을 지난다는 사실을 서술하면	3점
	점 P에 대해 세 점 P,Q,R이 한 직선 위에 있음을 설명하면	4점
	$\sqrt{5}-1$을 구하면	3점

7. 예시 답안

(2-1) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2)과 점 $(-5,-1)$ 사이의 거리의 제곱 함수는

$$f(t)=(t+5)^2+(t^2+1)^2=t^4+3t^2+10t+26$$

이고, $f'(t)=4t^3+6t+10=2(t+1)(2t^2-2t+5)$이다. $t=-1$일 때만이 $f'(t)=0$이므로 가장 가까운 점의 좌표는 $(-1,1)$ 이다.

(2-2) 점 P와 가장 가까운 점 Q의 좌표를 (a,a^2)이라 하면, 점 Q에서의 접선과 직선 PQ는 서로 수직이다. 따라서 직선 PQ의 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$이다. 따라서 점 P의 좌표 (x,y)는 $2a^3-(2y-1)a-x=0$을 만족하고, 제시문 (나)의 음함수 미분법에 의하여

$$6a^2a'-(2y-1)a'-2y'a-x'=0$$

이다. 한편 $x'=2,\ y'=-1-\pi\sin(\pi s)$이고, $s=-4$일 때 $x'=2,\ y'=-1$ 이다. 또한 $s=-4$일 때, $x=-5$, $y=-1$이므로 (2-1)에 의해 $a=-1$이다. 따라서 $s=-4$일 때, $6a'-(-3)a'-4=0$이고 $a'=\frac{4}{9}$이다.

한편, $\{d(s)\}^2=\overline{PQ}^{\,2}=(a-x)^2+(a^2-y)^2$ 이므로,

$$2d(s)\cdot d'(s)=\frac{d}{ds}(d(s)^2)=2(a-x)\cdot(a'-x')+2(a^2-y)\cdot(2a\cdot a'-y')$$

이고

$$2d(-4)\cdot d'(-4)=2(-1+5)\cdot\left(\frac{4}{9}-2\right)+2(1-(-1))\cdot\left(\left(-2\cdot\frac{4}{9}\right)+1\right)=-\frac{112}{9}+\frac{4}{9}=-12$$

이다. 그리고 $d(-4)=2\sqrt{5}$ 이므로 $d'(-4)=-\frac{12}{4\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 이다.

(2-3) 최소가 되는 점 P, Q, R이 있다고 하자. 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심을 S라 하자. 직선 PR은 점 R에서 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 접선과 수직이므로, 점 S를 지나야 한다. 따라서 직선 PR은 점 P와 S를 잇는 직선이고, 선분 PR의 길이는 $\overline{PS}-1$이다.

만약 점 S, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으면, $\overline{QS}-1<\overline{PQ}+\overline{PS}-1$이다. 따라서 직선 QS 위에 있는 점 중 원 바깥에 있는 점 T를 잡으면, $\overline{QT}+\overline{RT}=\overline{QS}-1<\overline{PQ}+\overline{PS}-1=\overline{PQ}+\overline{PR}$이 되어 모순이다. 따라서 점 S, P, Q는 일직선상에 있어야 하고, $\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{QS}-1$이다. 그러므로 $\overline{QS}$가 최소가 되는 점 Q에 대하여 $\overline{QS}-1$의 값이 최솟값이 된다.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 (b, b^2)과 점 $(3, 0)$ 사이의 거리의 제곱은 b^4+b^2-6b+9이고 이를 미분하면 $4b^3+2b-6=2(b-1)(2b^2+2b+3)$이므로 $b=1$에서 거리의 제곱이 최소이다. 즉, 점 $(1, 1)$과 $(3, 0)$을 잇는 선분 위의 점 중 원 밖의 한 점을 P로 잡으면 $\overline{PQ}+\overline{PR}$이 최소이다. 예를 들면, 점 P로 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$을 선택할 수 있다. 이때 $\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{QS}-1=\sqrt{5}-1$이다.

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II	
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 평균값 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

평균값 정리를 이해하고 그것을 문제에 적용할 수 있는지 평가한다. 증가함수의 수학적 정의를 이해하고 미분값과 함수의 증감의 관계를 이해하는지 평가한다. 논리적인 서술 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
	(가)	[12수학Ⅱ02-07]	함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
	(나), (다)	[12수학Ⅱ02-08]	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내					
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 제시문
수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	80	(가)
수학 II	홍성복 외	지학사	2020	81	(가)
수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	83	(나)
수학 II	배종숙 외	지학사	2020	83	(나)
수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	85	(다)
수학 II	홍성복 외	지학사	2020	84	(다)

5. 문항 해설

(3-1) 평균값 정리와 증가함수의 의미를 이해하고 있는지 확인하는 문제이다.

(3-2) (3-1)과 귀류법을 써서 논리적으로 주어진 명제를 증명할 수 있는지 알아보는 문제이다. 명제는 직관적으로는 당연히 성립해야 할 것 같이 보인다. 하지만 성립하는 이유를 논리적으로 정확하게 기술하여야 한다.

(3-3) (3-2)의 조건을 만족하는 함수가 실제로 존재하는지 확인하는 문제이다. 함수 $g(x)$의 $x=2$에서 도함숫값과 이계 도함숫값을 구하고 주어진 조건을 만족하는지 확인하면 된다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	두 구간 (a,b), (b,c)에서 평균값 정리를 제대로 적용하면	2점
	$f'(x)$가 증가함수임을 이용하여 부등식이 성립함을 보이면	5점
(3-2)	어떤 양의 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)>1$이라 가정하고 귀류법 증명을 시도하면	3점
	어떤 $\beta>\alpha$에 대하여 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=k>1$이고 $x>\beta$인 임의의 x에 대하여 (3-1)의 결과를 이용하면	10점
	증명을 완결하면	7점
(3-3)	$p=\dfrac{1}{8}$을 구하면	3점
	$q=\ln 2-\dfrac{3}{2}$을 구하면	3점
	$x=2$에서 $g'(2)=\dfrac{1}{2}$인 도함수와 $g''(2)=\dfrac{1}{4}$인 이계도함수가 존재함을 서술하면	2점

7. 예시 답안

(3-1) 구간 (a,b)와 (b,c)에서 함수 $f(x)$에 제시문 (가)의 평균값 정리를 적용하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(d)$인 $d \in (a,b)$와 $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(e)$인 $e \in (b,c)$가 존재한다. 이때, $d < e$이고 제시문 (다)에 의해 $f'(d) < f'(e)$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(3-2) 어떤 양의 실수 α에 대하여 $f'(\alpha) > 1$이 성립한다고 가정하자. $f'(x)$는 증가하므로 제시문 (가)의 평균값 정리에 의해 $\beta > \alpha$인 모든 β에 대하여 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = k \geq f'(\alpha) > 1$이다. (3-1)에 의해 $x > \beta$인 임의의 x에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} > \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = k > 1$이고 $f(x) > f(\beta)+k(x-\beta)$이다. 따라서 $x > \dfrac{k\beta - f(\beta)}{k-1}$인 x에 대하여 $f(x) > f(\beta)+k(x-\beta) > x$이므로 $f(x) \leq x$에 모순이다. 그러므로 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) \leq 1$이다.

(3-3) $x=2$일 때 미분값이 같아야 하는데 $g(x) = px^2$의 도함수는 $g'(x) = 2px$이고 $g(x) = x - \ln x + q$의 도함수는 $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$이므로 $g'(2) = 4p = 1 - \dfrac{1}{2}$이어야 한다. 즉, $p = \dfrac{1}{8}$이다. 한편, $x=2$일 때 함숫값이 같아야 하므로 $g(2) = \dfrac{1}{2} = 2 - \ln 2 + q$이어야 한다. 따라서 $q = \ln 2 - \dfrac{3}{2}$이다. 그러면 모든 $x > 0$에 대하여 $g(x) \leq x$이고 $g''(x) > 0$이다. 그러므로 $p = \dfrac{1}{8}$, $q = \ln 2 - \dfrac{3}{2}$일 때, $g(x)$는 (3-2)의 조건을 만족하는 함수이다.