2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 ☐ 오후
			■ 1번 ☐ 2번 ☐ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	아래로 볼록, 접선	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

아래로 볼록인 함수의 특성을 이해하고 그것을 부등식에 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ☐ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ■ 미적분 ☐ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
(가)	[12미적02-11]	접선의 방정식을 구할 수 있다.
(나)	[12미적02-12]	함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	[12미적02-13]	방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	106	(가)
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	108	(가)
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	113	(나)
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	116	(나)

5. 문항 해설

(1-1), (1-2), (1-3) 그래프의 개형을 부등식에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	접점의 x좌표와 접선의 방정식을 구하면	5점
	$3(1-\ln 3)$을 구하면	3점
(1-2)	$2a+b$가 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(2)$임을 관찰하면	4점
	$x=2$에서 곡선 $y=e^x$의 접선을 구하면	4점
	$b=-e^2$을 구하면	4점
(1-3)	(최대 조건) $2a+b$가 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(2)$임을 관찰하면	6점
	$e^p=e^{q-3}=\dfrac{e^p-(e^{q-3}+6)}{p-q}$을 구하면	3점
	최댓값을 만족하는 직선을 구하면	4점
	$b=6-2\ln 2$를 구하면	2점

7. 예시 답안

(1-1) 부등식이 성립하려면 직선 $y=3x+b$가 곡선 $y=e^x$보다 아래에 위치해야 한다. 제시문 (나)에 의해 $y=e^x$이 아래로 볼록이므로 b가 최대인 경우는 직선이 접하는 경우이다. 기울기가 3인 접점의 x좌표는 $\ln 3$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=3x+3(1-\ln 3)$이고 $b=3(1-\ln 3)$이다.

(1-2) $f(x)=ax+b$라 하면 $f(2)=2a+b$이므로 $x=2$에서의 함숫값이 최대인 직선일 때이다. (1-1)과 마찬가지로 제시문 (나)에 의해 $y=e^x$이 아래로 볼록이므로 $x=2$에서의 접선일 때 $2a+b$가 최대이다. 따라서 기울기는 e^2이고 $f(x)=e^2(x-2)+e^2$이므로 $b=-e^2$이다.

(1-3) (1-2)와 마찬가지로 $f(x)=ax+b$라 하면 $f(2)=2a+b$이므로 $x=2$에서의 함숫값이 최대인 직선일 때이다. 부등식을 만족하기 위해서는 직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{x-3}+6$보다 아래에 위치해야 한다. 제시문 (나)에 의해 그래프의 개형으로부터 두 곡선에 동시에 접할 때 $2a+b$의 값이 최대가 된다. $y=e^x$에서의 접점을 (p, e^p), $y=e^{x-3}+6$에서의 접점을 $(q, e^{q-3}+6)$이라 하면 e^x의 도함수가 e^x이므로 두 점을 잇는 직선의 기울기가 각 점에서의 미분계수와 같으므로

$$e^p=e^{q-3}=\frac{e^p-(e^{q-3}+6)}{p-q}$$

를 얻는다. $p=q-3$이므로 $e^p=2$가 되어 $p=\ln 2$이다. 즉 $y=2(x-\ln 2)+2$일 때 $2a+b$가 최대이며 $2a+b=2(2-\ln 2)+2=6-2\ln 2$이다.

(별해) (1-1) $f(x) = e^x - 3x - b$라 하면 $f(x)$의 최솟값이 0 이상이면 된다.

$$f'(x) = e^x - 3 \qquad \therefore f'(\ln 3) = 0$$

$x < \ln 3$에서 $f'(x) < 0$이고 $x > \ln 3$, $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 $\ln 3$에서 최솟값을 갖는다.

$f(\ln 3) = 3 - 3\ln 3 - b \geq 0$이므로 b의 최댓값은 $3 - 3\ln 3$

(1-2) ① $ax + b \leq e^x$이므로 $2a + b \leq e^2$. $y = e^x$와 $y = ax + b$의 관계에 의해 접선일 때 최대

② (1-1)에 의해 기울기가 a인 직선 $ax + b$는 $y = e^x$에 접할 때 $ax + b$가 최대. 접점의 좌표를 t라 하면

$$e^t = a, \quad b = (1-t)e^t, \quad g(t) = 2a + b = 2e^t + (1-t)e^t = (3-t)e^t$$

따라서 $g'(t) = (2-t)e^t$이므로 $t = 2$일 때 $g(t) = 2a + b$가 최대이므로

$$b = -e^2$$

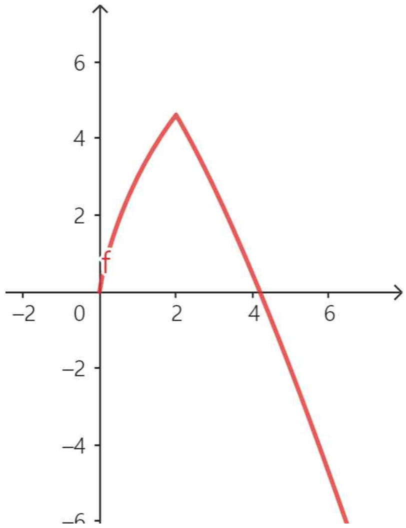
(1-3) (1-2)를 이용하면, $ax + b \leq e^x$에서 $2a + b \leq 3a - a\ln a$.

$ax + b \leq e^{x-3} + 6$으로부터 $2a + b \leq 6 - a\ln a$.

$\therefore\ 2a + b \leq g(a)$

$$g(a) = \begin{cases} 6 - a\ln a & (2 < a) \\ 3a - a\ln a & (0 < a \leq 2) \end{cases}$$

여기서 $0 < a < 2$에서 $g'(a) > 0$이고, $a > 2$에서 $g'(a) < 0$이므로



그래프의 개형을 보면 $2a + b$의 최댓값은 $a = 2$ 일 때,

$$g(2) = 6 - 2\ln 2$$

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II	
	핵심개념 및 용어	점과 직선 사이의 거리, 극대, 극댓값	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가한다. 극값을 활용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학, 수학II)
(가)	[10수학02-05]	점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
(나)	[12수학II02-08]	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	133	(가)
수학	권오남 외	㈜교학사	2020	125	(가)
수학II	배종숙 외	㈜금성출판사	2020	89	(나)
수학II	홍성복 외	지학사	2020	88	(나)

5. 문항 해설

(2-1) 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점에서 직선 $y=tx$와의 거리가 최소인 점과 그때의 거리 $r(t)$를 t에 관한 식으로 표현하는 문제이다.

(2-2) (2-1)에서 구한 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r(t)$인 원 중에 반지름의 길이가 최대인 원이 원점을 지남을 보이는 문제로 $r(t)$의 도함수를 구하고 제시문 (나)를 이용하여 극댓값(최댓값)을 갖는 점 $t=a$를 찾고 그때의 원 C_a의 방정식을 구하여 원점을 지남을 보이는 문제이다.

(2-3) (2-2)에서 구한 점 P와 원 C_a의 방정식을 이용하여 중심 P의 위치를 파악하고 원 C_a와 각각의 좌표축과의 교점을 통해 구하고자 하는 부분의 넓이를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

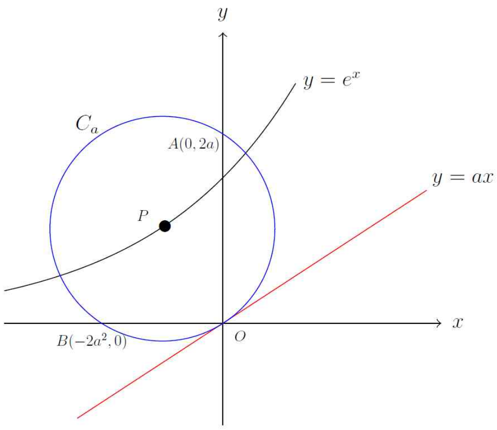
하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	점 $P(\ln t, t)$를 구하면	4점
	$r(t)=\dfrac{t-t\ln t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t(1-\ln t)}{\sqrt{t^2+1}}$ 를 구하면 (부호 틀리면 2점 감점)	4점
(2-2)	$r'(t)=\dfrac{-\ln t-t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$ 를 구하면	5점
	$\ln a=-a^2$임을 보이면	3점
	원 C_a가 원점을 지남을 보이면	7점
(2-3)	넓이 $\dfrac{1}{2}\pi a^2(a^2+1)+2a^3=\dfrac{\pi}{2}a^4+2a^3+\dfrac{\pi}{2}a^2=a^2\left(\dfrac{\pi}{2}a^2+2a+\dfrac{\pi}{2}\right)$를 구하면	12점

7. 예시 답안

(2-1) 거리가 최소가 되는 점은 직선 $y=tx$와 평행인 접선을 갖는 곡선 $y=e^x$ 위의 점이므로 $P(\ln t, t)$이고 $r(t)$는 점 P와 직선 $y=tx$ 사이의 거리이므로 제시문 (가)에 의해 $r(t)=\dfrac{t-t\ln t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t(1-\ln t)}{\sqrt{t^2+1}}$ $(0<t<e)$이다.

(2-2) $r'(t)=\dfrac{-\ln t-t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$이므로 $r'(t)=0$을 계산하면 $\ln t=-t^2$을 얻고 이때의 t를 a라 하자. $0<t<a$에서 $-t^2>\ln t$이므로 $r'(t)>0$이고 $a<t<e$에서 $-t^2<\ln t$이므로 $r'(t)<0$이다. 그러므로 제시문 (나)에 의해 $t=a$에서 $r(t)$는 최댓값 $a\sqrt{a^2+1}$을 갖는다. 원 C_a의 방정식이 $x^2+2a^2x+y^2-2ay=0$이므로 원점을 지난다.

(2-3) 원 C_a의 방정식이 $x^2+2a^2x+y^2-2ay=0$이므로 좌표축과 만나는 점은 $O(0,0)$, $A(0,2a)$, $B(-2a^2,0)$이다. 원 C_a를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + \triangle ABO\text{의 넓이} = \frac{1}{2}\pi a^2(a^2+1) + 2a^3 = \frac{\pi}{2}a^4 + 2a^3 + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2}a^2 + 2a + \frac{\pi}{2}\right) \text{ 이다.}$$

(단, 여기서 a는 $\ln a = -a^2$인 상수이다.)

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	매개변수로 나타낸 함수의 미분, 치환적분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

두 곡선이 한 점에서만 만날 조건을 접점에 관한 식으로 표현하고, 매개변수로 나타낸 함수의 미분을 계산하고 치환적분을 이용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
	(가)	[12미적02-08]	매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
	(나)	[12미적03-01]	치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	(다)	[12미적02-03]	삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	91	(가)	
미적분	권오남 외	교학사	2020	93	(가)	
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	148	(나)	
미적분	권오남 외	교학사	2020	156	(나)	
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	67	(다)	재구성
미적분	권오남 외	교학사	2020	65	(다)	재구성

5. 문항 해설

(3-1) 그래프의 개형으로부터 두 곡선이 한 점에서 만날 때는 함숫값과 미분계수가 일치해야 함을 이용하는 문제이다.
(3-2) 제시문 (가)를 이용하여 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제이다.
(3-3) 제시문 (나)를 이용하여 변수 x를 변수 t로 치환하여 적분하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	두 곡선이 한 점에서 만날 조건을 찾으면	6점
	p, q를 t로 표현하면	2점
(3-2)	$t=\frac{\pi}{4}$를 찾으면	2점
	$\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$를 구하면	6점
	$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면	2점
(3-3)	치환적분을 올바르게 적용하면	4점
	적분값을 정확히 계산하면	8점

7. 예시 답안

(3-1) 한 점에서 만나는 경우 교점에서 접선의 기울기가 일치해야 하므로 두 방정식 $(t-p)^2+q=\cos t$, $2(t-p)=-\sin t$를 얻는다.

p, q를 각각 t에 대하여 풀면

$$p=t+\frac{\sin t}{2},\ q=\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2$$

(3-2) $\dfrac{dp}{dt}=1+\dfrac{\cos t}{2}>0$이므로 $p=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$인 t는 $t=\dfrac{\pi}{4}$가 유일하다.

제시문 (가)를 이용하여 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면

$$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{q'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{p'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3-3) 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 적분을 계산하면

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\left(\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{\cos t}{2}\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\frac{\cos^2 t}{2}-\frac{\sin^2 t}{4}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{4}-\frac{1-\cos 2t}{8}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)dt=\left[\frac{1}{8}t+\frac{3}{16}\sin 2t-\frac{1}{24}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$$

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전(의예과) □ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	매개변수로 나타낸 함수의 미분, 치환적분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

두 곡선이 한 점에서만 만날 조건을 접점에 관한 식으로 표현하고, 매개변수로 나타낸 함수의 미분을 계산하고 치환적분을 이용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학 I □ 수학 II ■ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	**관련 제시문**	**성취기준**	**과목명: (미적분)**
	(가)	[12미적02-08]	매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
	(나)	[12미적03-01]	치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	(다)	[12미적02-03]	삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	91	(가)	
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	93	(가)	
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	148	(나)	
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	156	(나)	
미적분	황선욱 외	미래엔	2020	67	(다)	재구성
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	65	(다)	재구성

5. 문항 해설

(1-1) 그래프의 개형으로부터 두 곡선이 한 점에서 만날 때는 함숫값과 미분계수가 일치해야 함을 이용하는 문제이다.
(1-2) 제시문 (가)를 이용하여 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제이다.
(1-3) 제시문 (나)를 이용하여 변수 x를 변수 t로 치환하여 적분하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	두 곡선이 한 점에서 만날 조건을 찾으면	6점
	p, q를 t로 표현하면	2점
(1-2)	$t=\frac{\pi}{4}$를 찾으면	2점
	$\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$를 구하면	6점
	$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면	2점
(1-3)	치환적분을 올바르게 적용하면	4점
	적분값을 정확히 계산하면	8점

7. 예시 답안

(1-1) 한 점에서 만나는 경우 교점에서 접선의 기울기가 일치해야 하므로 두 방정식 $(t-p)^2+q=\cos t$, $2(t-p)=-\sin t$를 얻는다.
p, q를 각각 t에 대하여 풀면

$$p=t+\frac{\sin t}{2},\ q=\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2$$

(1-2) $\frac{dp}{dt}=1+\frac{\cos t}{2}>0$이므로 $p=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$인 t는 $t=\frac{\pi}{4}$가 유일하다. 제시문 (가)를 이용하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면

$$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{q'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{p'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1-3) 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 적분을 계산하면

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\left(\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{\cos t}{2}\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\frac{\cos^2 t}{2}-\frac{\sin^2 t}{4}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{4}-\frac{1-\cos 2t}{8}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)dt=\left[\frac{1}{8}t+\frac{3}{16}\sin 2t-\frac{1}{24}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$$

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전(의예과) ☐ 오후 ☐ 1번 ■ 2번 ☐ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II	
	핵심개념 및 용어	정적분, 함수의 연속	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

정적분의 의미, 함수의 연속과 불연속, 함수의 최댓값과 최솟값의 개념을 잘 이해하고 있는지 평가한다. 문제를 해결하기 위하여 필요한 함수의 개형을 파악할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ☐ 수학 I ■ 수학 II ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
(가)	[12수학Ⅱ01-04]	연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(나)	[12수학Ⅱ03-05]	곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	[12수학Ⅱ01-03]	함수의 연속의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학II	류희찬 외	천재교과서	2020	38	(가)	
수학II	박교식 외	동아출판	2020	40	(가)	
수학II	류희찬 외	천재교과서	2020	136	(나)	재구성
수학II	박교식 외	동아출판	2020	141	(나)	재구성

5. 문항 해설

(2-1) 함수의 연속을 이해하고 사잇값 정리를 활용할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(2-2) 함수의 최솟값의 의미를 이해하는지 평가하는 문제이다.
(2-3) 문제를 해결하기 위하여 그래프의 개형을 이해해야 한다. 주어진 정보로부터 그래프의 개형을 파악할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	$t=-2$일 때 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않는다는 것을 증명하면	2점
	$t>-2$일 때 $f(x)=0$이 양의 실근을 갖는다는 것을 증명하면	5점
(2-2)	$g(0)$의 값이 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$ 또는 $\int_0^4 f(x)dx=-\frac{8}{3}$임을 밝히면	3점
	$g(0)=\frac{11}{6}$인 이유를 정확하게 설명하면	7점
(2-3)(a)	직선 $y=tx$가 $y=(x-1)(x-4)$에 접할 때 p가 최소가 될 수 있음을 밝히면	4점
	$p=-1$임을 설명하면	4점
(2-3)(b)	최솟값이 0 이하이고 최소가 되는 t의 값이 $(-1,0)$에 있어야 함을 관찰하면	2점
	$g(t)$의 최솟값 m이 클수록 $q-p$의 값이 작아진다는 것임을 밝히면	3점
	$m=0$일 때 $q-p$의 값이 최소가 됨을 서술하면	3점
	$r=-\frac{2}{7}$임을 보이면	2점

7. 예시 답안

함수 $h(x)=\begin{cases}(x-1)(x-4) & (x\le 4)\\ -2(x-4) & (x\ge 4)\end{cases}$라 하면 문제에서 함수 $g(t)$의 성질(i)은 다음과 같다.

$g(t)=\int_0^{\beta}(h(x)-tx)\,dx$이고 이때 β는 $h(\beta)=t\beta$인 어떤 양의 실수이다.

(2-1) 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$는 연속이다.
$t=-2$이면 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4 & (x\le 4)\\ 8 & (x\ge 4)\end{cases}$인데 $x^2-3x+4=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}>0$이므로 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. 한편, $t>-2$이면 $\underline{f(0)=4>0\text{이고}}$ x가 커짐에 따라 $f(x)$가 무한히 작아지므로 $f(x)=0$이 되는 양의 실수 x가 존재한다.
따라서, $c=-2$이다.

$t>0$일 때 $h(x)=tx$의 해는 유일하게 존재한다. 이 해를 β라 하면, $g(t)=\int_0^{\beta}f(x)dx$이다. 또한,

$x \in (0, \beta)$에 대하여 $h(x) > tx$이므로 $g(t) > 0$이다. 한편, $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$이다.

$t = 0$일 때 $h(x) = tx = 0$의 해는 1, 4이므로 $g(0)$의 값은 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{11}{6}$ 또는 $\int_0^4 f(x)dx = -\frac{8}{3}$이다.

$-1 < t < 0$일 때는 $f(x) = 0$은 세 개의 실근을 갖는다. 세 개의 실근을 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$라 하면

$\int_0^{\alpha_1} f(x)dx > 0$, $\int_0^{\alpha_3} f(x)dx > \int_0^{\alpha_2} f(x)dx > -\frac{8}{3}$이다. 따라서 $g(t) > -\frac{8}{3}$이다.

$t = -1$일 때 직선 $y = tx$는 곡선 $y = h(x)$에 접하며 접점은 $(2, -2)$이다. 또한 $(2, -2)$이외의 다른 교점도 있다. 어떤 경우이든 $g(-1) > 0$이다.

<u>$-2 < t < -1$</u>이면 $h(x) = tx$는 하나의 실근 $\beta(> 4)$를 갖고 $g(t) > 0$이다.

(2-2) 위에서 관찰한 것에 따르면 0이 아닌 모든 $t \in (-2, \infty)$에 대하여 $g(t) > -\frac{8}{3}$이고, $g(0)$의 함숫값은 $\frac{11}{6}$ 또는 $-\frac{8}{3}$이다. 만약, $g(0) = -\frac{8}{3}$이면 $g(t)$의 최솟값은 $-\frac{8}{3}$이 되고 $t = 0$에서만 $g(t)$가 최솟값을 갖는다. 문제의 조건에서 함수 $g(t)$의 값이 최소가 되는 t의 값이 두 개 이상이라고 했으니 모순이다. 따라서 $g(0) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{11}{6}$이다.

(2-3) 서로 다른 t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$에 대하여 $t = t_1, t_2$일 때 $g(t)$가 최솟값 m을 갖는다고 하자. $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$이고 $g(0) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{11}{6}$이므로 함수 $g(t)$는 $\frac{11}{6}$ 이하의 모든 양수를 함숫값으로 갖는다. 따라서 m은 0 이하이다. 또한 <u>$-2 < t \leq -1$와 $t \geq 0$에 대하여 $g(t)$는 항상 양수이므로 $-1 < t_1 < t_2 < 0$임을 알 수 있다.</u> 불연속점을 제외한 각 구간에서 $g(t)$는 감소한다. 따라서 $g(t)$는 $t = t_1, t_2$에서 불연속이다.

(a) $g(t)$는 $t \in (-2, -1)$에서 연속이다. 따라서 불연속점 중 가장 작은 것은 $p = -1$일 때 가능하다.

(b) $p = -1$, $q = t_1$, $r = t_2$임을 안다. $q - p = t_1 + 1$이 최소가 되려면 t_1의 값이 최소이어야 한다. $g(t_1) = m$인데 m이 클수록 t_1의 값은 작아진다. $m \leq 0$이어야 하므로 $g(t_1) = 0$일 때 $q - p$가 최소가 된다. 이때 r의 값은 $g(t_2) = 0$이 되는 t_2의 값이다.

$g(t_2) = \int_0^{\beta_2} f(x)dx$라 하면 $t_2 = -\frac{2(\beta_2 - 4)}{\beta_2}$이고

$$0 = \int_0^{\beta_2} f(x)dx = \int_0^4 (x-1)(x-4)dx - \int_4^{\beta_2} 2(x-4)dx - t_2 \int_0^{\beta_2} xdx$$
$$= -\frac{8}{3} - (\beta_2^2 - 8\beta_2 + 16) + \beta_2(\beta_2 - 4) = 4\beta_2 - \frac{56}{3}$$

이다. 따라서 $\beta_2 = \frac{14}{3}$이고 $r = t_2 = -\frac{2}{7}$이다.

2024학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전(의예과) □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I	
	핵심개념 및 용어	수학적 귀납법, 귀류법, 경우의 수	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

지문에서 주어진 상황을 논리적으로 해석하는 능력을 평가한다. 수학적 귀납법과 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가한다. 순열의 수, 곱의 법칙 등을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정“** ■ 수학 ■ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학, 수학I)
(가)	[12수학I03-08]	수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
(나)	[10수학03-07]	대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
	[10수학05-01]	합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내					
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문
수학I	배종숙 외	㈜금성출판사	2020	158	(가)
수학I	권오남 외	㈜교학사	2020	155	(가)
수학	배종숙 외	㈜금성출판사	2020	205	(나)
수학	황선욱 외	미래엔	2020	201	(나)

5. 문항 해설

(3-1) 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(3-2) 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(3-3) (a) 주어진 조건을 이용하면 $\sum_{i=1}^{99}|b_i|$를 간단한 형태로 바꿀 수 있다. 이때 $\sum_{i=1}^{99}|b_i|$의 값이 최대가 되도록 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$의 값을 정할 수 있다.

(b) 순열의 개수, 곱의 법칙 등을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하면	5점
(3-2)(a)	$N=0$인 재배열이 존재하지 않음을 증명하면	5점
(3-2)(b)	$N=1$인 재배열을 찾으면	3점
	위에서 구한 재배열에 대하여 $N=1$인 이유를 설명하면	2점
(3-3)(a)	$N=1$일 때, $b_1, b_2, \cdots, b_{99}$의 부호를 파악하면	2점
	$N=1$일 때, $\sum_{i=1}^{99}|b_i|$의 값을 $a_3+a_5+\cdots+a_{99}$와 $a_2+a_4+\cdots+a_{98}$로 나타내면	3점
	$M \le 4900$을 보이면	3점
	$\sum_{i=1}^{99}|b_i| = 4900$인 예를 찾으면	2점
(3-3)(b)	$\sum_{i=1}^{99}|b_i| = 4900$이기 위한 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$의 조건을 설명하면	3점
	위의 조건을 만족하는 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$에 대하여 $\sum_{i=1}^{99}|b_i| = 4900$임을 보이면	3점
	조건을 만족하는 재배열의 개수를 구하면	4점

7. 예시 답안

(3-1) $n=2$이면 $x_n = x_2$이고 $x_1 x_2 < 0$이므로 x_1과 x_n의 부호는 서로 다르다.

$n=3$이면 $x_n = x_3$이다. $x_1 x_2 < 0$이므로 x_1과 x_2는 부호가 다르다. 또한 $x_2 x_3 < 0$이므로 x_2와 x_3는 부호가 다르다. 따라서 x_1과 x_3는 부호가 서로 같다.

$k \geq 4$에 대하여 $n=k-1$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k$일 때 성립함을 보이자.

k가 짝수이면 $k-1$은 홀수이다. 따라서 x_{k-1}은 x_1과 부호가 같다. 또한 $x_{k-1}x_k < 0$이므로 x_{k-1}과 x_k는 부호가 다르다. 즉, x_1과 x_k는 부호가 서로 다르다.

k가 홀수이면 $k-1$은 짝수이다. 따라서 x_1과 x_{k-1}은 부호가 다르고, $x_{k-1}x_k < 0$이므로 x_{k-1}과 x_k는 부호가 다르므로 x_1과 x_k는 부호가 서로 같다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 명제가 성립한다.

(3-2) (a) 귀류법으로 증명하자. $N=0$인 재배열 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 각각의 $i=1,2,\cdots,98$에 대하여 $b_i b_{i+1} < 0$이다. (3-1)에 의하여 b_1과 b_{99}의 부호는 같고 $b_{99}b_1 > 0$이므로 $N=0$이라는 것에 모순이다. 따라서 $N \geq 1$이다.

(b) n이 짝수일 때 a_n은 51 이상이고 n이 홀수일 때 a_n은 50 이하인 아래 재배열에 대하여 $N=1$임을 보이자.

$$a_1 = 50,\ k=1,2,\cdots,49\text{에 대하여 } a_{2k} = 50+k,\ a_{2k+1} = k \qquad (*)$$

$k=1,\cdots,49$에 대하여 $b_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k} \leq 50 - 51 < 0$, $b_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k-1} \geq 51 - 50 > 0$이고 $b_{99} = a_1 - a_{99} = 50 - 49 > 0$이다. 즉, $b_1, b_2, \cdots, b_{99}$에는 양수와 음수가 교대로 나온다. 따라서 $b_1 b_2, b_2 b_3, \cdots, b_{98} b_{99}$ 는 모두 음수이고 $b_{99} b_1$은 양수이다. 그러므로 이 재배열에서 $N=1$이다.

(3-3) $N=1$이므로 어떤 $j=1,2,\cdots,99$에 대하여 $b_j b_{j+1} > 0$이고 (단, $b_{100} = b_1$) j가 아닌 i에 대하여 $b_i b_{i+1} < 0$이다. 일반성을 잃지 않고 $j=99$, 즉, $b_{99} b_1 > 0$이고 $b_1 b_2, b_2 b_3, \cdots, b_{98} b_{99} < 0$이라 하자. 또한 일반성을 잃지 않고 $b_{99} > 0$이라 하자. 이때 $b_1 > 0$이다. $b_1 b_2, b_2 b_3, \cdots, b_{98} b_{99} < 0$이므로 (3-1)에 의하여 $b_1, b_3, \cdots, b_{99}$는 모두 양수 $b_2, b_4, \cdots, b_{98}$은 모두 음수이다. 따라서 $|b_{2k-1}| = b_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k-1}$, $|b_{2k}| = -b_{2k} = a_{2k} - a_{2k+1}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{99} |b_i| &= \sum_{k=1}^{50} |b_{2k-1}| + \sum_{k=1}^{49} |b_{2k}| \\
&= (a_2 - \cancel{a_1}) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{96} - a_{95}) + (a_{98} - a_{97}) + (\cancel{a_1} - a_{99}) \\
&\quad + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{96} - a_{97}) + (a_{98} - a_{99}) \\
&= 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{98}) - 2(a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})\text{이다.}
\end{aligned}$$

(a) $a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} \leq 51 + 52 + \cdots + 99 = 49 \cdot \dfrac{150}{2} = 49 \cdot 75 = 3675$이고

$a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} \geq 1 + 2 + \cdots + 49 = 49 \cdot \dfrac{50}{2} = 1225$이므로 $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} |b_i| \leq 2 \cdot (3675 - 1225) = 4900$이다.

또한 (3-2)(b)에서 구한 재배열(*)에서 $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} |b_i| = 4900$이므로 $M = 4900$이다.

(b) (a)에서 $j=99$이고 $b_{99} > 0$인 경우에 $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} |b_i| = 4900$이기 위해서는 $a_2, a_4, \cdots, a_{98} \geq 51$이고 $a_3, a_5, \cdots, a_{99} \geq 49$이어야 함을 알 수 있다. 이러한 재배열의 개수는 $(49!)^2$이다. 그런데 j는 $1,2,\cdots,99$ 모두 가능하고 b_{99}가 음수인 경우도 있으므로 재배열의 총 개수는 $99 \cdot 2 \cdot (49!)^2 = 198 \cdot (49!)^2$이다.