논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열Ⅱ)

문항 1

[문항 1] 실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1-2a\sin\theta\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta$$

(2) 문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta$$

(3) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi\ln\left(1-a^{2^n}\right) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta \le 2\pi\ln\left(1+a^{2^n}\right)$$

(4) 다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta$$

문항 1 - 출제 의도

이 문항은 주어진 적분을 삼각함수의 덧셈정리와 로그함수의 기본 성질을 통해 치환적분하여 다루기 쉬운 형태로 변형할 수 있는 능력과 수학적 귀납법을 사용하여 적분값을 추론하는 능력을 평가하고자 함.

1-(1) 삼각함수의 성질에 대한 이해 바탕으로 치환적분을 적절히 활용할 수 있는 능력을 평가한다.

1-(2) 주어진 적분을 삼각함수의 성질과 삼각함수 덧셈정리를 활용하여 치환적분하기 쉬운 형태로 변형할 수 있는지 평가한다. 수열과 관련된 함수의 성질들을 적용하여 수학적 귀납법을 활용하는 수학적 추론 능력을 평가한다.

1-(3) 로그함수와 삼각함수의 기본성질을 활용하여 주어진 부등식을 유추할 수 있는 수리적 능력을 평가한다.

1-(4) 수열의 극한과 함수의 연속성을 바탕으로 적분값을 추론하는 능력을 평가한다.

문항 1 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	219-222
	수학	박교식 외	동아출판	2021	211-214
	수학 Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2023	24-27, 44-45, 52-53, 71, 74-75, 83, 89, 121, 131, 158-159
	수학 Ⅰ	권오남 외	교학사	2019	30-33, 51-52, 59, 77-78, 80-81, 87, 92, 116, 126-127, 154-155
	수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2023	12, 21, 25, 32, 38, 39, 126-127, 132-134
	수학 Ⅱ	류희찬 외	천재교육	2023	13, 22, 26, 30, 37, 38, 123, 126, 127
	미적분	이준열 외	천재교육	2023	11-12, 17-19, 22-23, 55-58, 65-66, 151
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	12, 17, 19, 21, 49-54, 59, 127

문항 1 -문항 해설

이 문항은 적분으로 제시된 조건을 분석적으로 이해하고 이를 바탕으로 로그함수와 삼각함수에 대한 치환적분을 수행하여 수열의 극한과 함수의 연속성을 통하여 주어진 적분의 값을 계산하는 문제이다. 변수의 치환을 통하여 적분의 구간에 변형이 있더라도 사인과 코사인의 덧셈정리를 반복적으로 적용하여 치환적분의 적분 구간을 원래 구간으로 되돌리고 삼각함수를 하나의 형태로 통일하는 것을 추론하여 이를 바탕으로 주어진 정적분이 0으로 수렴하는 수열의 사이에 포함되어 있도록 나타내는 수리적 능력을 평가한다. 이 과정에서 수학적 귀납법을 사용하여 등비수열을 구하고 이 등비수열의 극한값을 함수의 극한값에 적용하는 추론능력과 계산능력을 평가한다.

문항 1 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	다음 등식이 성립함을 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$	5점

하위 문항	채점 기준	배점
	$\theta = -t$로 치환 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin t)(-1)\,dt$임을 보임. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin t)(-1)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin t)\,dt$임을 보임.	
1-(2)	문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta)\,d\theta$	25점
	문항 (1)에 의하여 아래의 등식을 유도함. $2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta)\,d\theta$ $1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$임을 이용하고, $2\theta = t$를 치환하여 아래의 등식이 성립함을 보임. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta))\,d\theta$ $= \frac{1}{2}\left\{\int_{-\pi}^{0} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt + \int_{0}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt\right\}$ $x = t + \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_{-\pi}^{0} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin x)\,dx$ $y = t - \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_{0}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1-2a^2\sin y)\,dy$ 위의 식을 정리하여, $n=1$일 때 주어진 등식이 성립함을 확인함. $n=k$일 때 아래의 주어진 등식이 성립한다고 가정함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta$ 위의 식에서 $0 \le a^{2^{k+1}} < 1$, $a^{2^{k+1}} = \left(a^{2^k}\right)^2$, $a^{2^{k+2}} = \left(a^{2^{k+1}}\right)^2$임을 언급함. $n=k$일 때 성립한다는 가정과 위의 식으로부터 아래의 식을 유도함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^{k+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin\theta)\,d\theta$ 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 기술함.	

하위 문항	채점 기준	배점
1-(3)	다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. $$2\pi\ln(1-a^{2^n}) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta)\,d\theta \le 2\pi\ln(1+a^{2^n})$$	5점
	$\left(1-a^{2^n}\right)^2 \le a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta \le \left(1+a^{2^n}\right)^2$ 임을 보임. 위 부등식에 로그함수를 적용하여 아래의 부등식을 유도함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-a^{2^n}\right)^2 d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+a^{2^n}\right)^2 d\theta$	
1-(4)	다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$	5점
	모든 자연수 n에 대하여 아래의 부등식을 유도함. $\frac{2\pi\ln(1-a^{2^n})}{2^n} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta \le \frac{2\pi\ln(1+a^{2^n})}{2^n}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\ln\left(1+a^{2^n}\right)}{2^n}=0$ 임을 보임. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\ln\left(1-a^{2^n}\right)}{2^n}=0$ 임을 보임. 사잇값 정리에 의하여 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta=0$을 얻음.	

문항 1 - 예시 답안

실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오.

1-(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$$

[풀이]

$\theta=-t$로 치환하면 $dt=-d\theta,\ t\in\left[\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta=\sin(-t)=-\sin t$가 성립하므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin t)(-1)\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+1+2a\sin t)\,dt$$

1-(2) 문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta)\,d\theta$$

[풀이]

수학적 귀납법을 사용하여 증명한다. 먼저 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립하는지 확인한다. 문항 (1)에 의하여

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta$$

가 성립한다. 위 등식의 우변을 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{\ln(a^2+1+2a\sin\theta)+\ln(a^2+1-2a\sin\theta)\}\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2-4a^2\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta))\,d\theta \quad (1-2\sin^2\theta=\cos2\theta) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\cos2\theta)\,d\theta \qquad \left(t=2\theta \Rightarrow d\theta=\frac{1}{2}dt,\ t\in[-\pi,\pi]\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

여기에서 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt$를 아래와 같이 표현할 수 있다.

우선 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt = \int_{-\pi}^{0} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt + \int_{0}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt$로 분리하여, 우변의 첫 번째 적분에는 $t=x-\frac{\pi}{2}$로 치환하여 $dt=dx$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$를 활용하고, 두 번째 적분에는 $t=y+\frac{\pi}{2}$로 치환하여 $dt=dy$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t=\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin y$를 활용한다. 이 치환적분의 결과와 문항 (1)에 의하여 아래의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt &= \int_{-\pi}^{0} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt + \int_{0}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin x)\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1-2a^2\sin y)\,dy \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

위의 두 등식을 정리하면 아래가 성립한다.

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin\theta)\,d\theta$$

따라서 $n=1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

$n=k$일 때 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta$이 성립한다고 가정하자.

위의 식에서 $a^{2^k}=\beta$라고 하면 $a^{2^{k+1}} = a^{2^k\cdot 2} = (a^{2^k})^2 = \beta^2$이고 $\beta^4 = (\beta^2)^2 = a^{2^{k+2}}$이 성립한다.
이때 $-1<a<1$이므로 $0 \le a^{2^k} = \beta < 1$이고, $0 \le a^{2^{k+1}} = \beta^2 < 1$이다. 그러므로 $n=1$일 때의 식에서 a에 β를 대입하면,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2+1+2\beta\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4+1+2\beta^2\sin\theta)\,d\theta$$

이 성립하고

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2+1+2\beta\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4+1+2\beta^2\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

이 성립하여 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

1-(3) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi\ln(1-a^{2^n}) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta)\,d\theta \le 2\pi\ln(1+a^{2^n})$$

[풀이]

$-1<a<1$이므로 $0 \le a^{2^n} < 1$이고 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에 대하여 $-1 \le \sin\theta \le 1$이므로 아래의 부등식이 성립한다.

$$(1-a^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}(-1) \le a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta \le a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\cdot 1 = (1+a^{2^n})^2$$

위 부등식에 밑이 1보다 큰 로그함수가 증가함수인 것을 적용하면 아래의 부등식이 성립한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-a^{2^n})^2\,d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta)\,d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a^{2^n})^2\,d\theta$$

위 부등식의 왼쪽과 오른쪽 적분에서 $\ln(1\pm a^{2^n})^2 = 2\ln(1\pm a^{2^n})$는 변수 θ에 대하여 상수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 \pm a^{2^n}\right)^2 d\theta = 2\ln\left(1 \pm a^{2^n}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = 2\pi\ln\left(1 \pm a^{2^n}\right)$$

가 되어 아래의 부등식이 성립한다.

$$2\pi\ln\left(1 - a^{2^n}\right) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta\right) d\theta \le 2\pi\ln\left(1 + a^{2^n}\right)$$

1-(4) 다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 + 1 + 2a\sin\theta\right) d\theta$$

[풀이]

문항 (2)과 문항 (3)에 의하여 아래의 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$$\frac{2\pi\ln\left(1 - a^{2^n}\right)}{2^n} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 + 1 + 2a\sin\theta\right) d\theta \le \frac{2\pi\ln\left(1 + a^{2^n}\right)}{2^n}$$

위 부등식에서 $-1 < a < 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} a^{2^n} = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$이며 로그함수의 연속성에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + a^{2^n}\right) = \ln 1 = 0,\ \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - a^{2^n}\right) = \ln 1 = 0$$

이 성립한다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi\ln\left(1 + a^{2^n}\right)}{2^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi\ln\left(1 - a^{2^n}\right)}{2^n} = 0$이 성립하여 사잇값 정리에 의하여

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 + 1 + 2a\sin\theta\right) d\theta = 0$$ 이다.

문항 2

[문항 2] 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오.

(2) 부등식 $a^2e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2e^{a+1}$과 $b^2e^b < e^{-1} < (b+1)^2e^{b+1}$을 만족시키는 정수 a,b를 모두 구하시오. (단, $2.7 < e$)

(3) 방정식 $f(x)=k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.

문항 2 - 출제 의도

2-(1) 여러 가지 함수의 미분법을 통해 주어진 함수의 도함수를 정확히 계산하여야 한다. 그리고 도함수의 부호를 통해 함수의 증가와 감소를 판정하고, 이를 통해 함수의 그래프 개형을 그리고 극대와 극소를 설명할 수 있는 능력을 평가한다. 추가로 x축이 점근선이 된다는 사실을 자세히 관찰해야 한다.

2-(2) 주어진 부등식이 함수의 그래프와 특정한 정수에 대응하는 함숫값을 지나면서 x축에 평행한 직선의 교점의 위치를 파악하여 정수가 아닌 다른 근이 어느 두 정수 사이에 놓이게 되는지의 구체적인 상황을 묻고 있음을 추론하는 능력을 평가한다. 이 과정에서 무리수 e의 근삿값을 이용하여 몇 가지 정수에 대응하는 함숫값과 극값의 대소관계를 결정할 수 있는 수리적 조작 및 계산 능력을 확인한다.

2-(3) 직선에 $y=k$대하여 k의 값에 따라 교점의 개수를 3가지 경우로 나눌 수 있는지 유추하는 능력을 평가하고 각 경우에 어느 특수한 정수근을 포함하고 다른 근은 어떤 특성을 가지는지 구체적인 상황을 조사하는 능력을 파악한다. 이를 바탕으로 문항 (2)의 결과로부터 서로 다른 두 개의 정수가 동시에 같은 함숫값에 대응할 수 없다는 사실을 확인해 가는 과정을 평가한다.

문항 2 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2021	211-212
	수학	홍성복 외	지학사	2021	219-222
	수학II	권오남 외	교학사	2022	88-102
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2023	78-89, 92-95
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2022	49-57, 102-110

미적분	김원경 외	비상교육	2021	49-57, 99-105

문항 2 - 문항 해설

이 문제는 실숫값의 범위에 따라 주어진 방정식의 실근의 개수를 파악하고 실근이 정수이기 위해 함숫값이 가져야 하는 특성을 추론하는 문제이다. 이 과정에서 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소, 함숫값의 극대와 극소를 판정하고 그래프의 개형을 그릴 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 무리수의 근삿값을 이용하여 정수에 대응하는 함숫값과 극값의 대소관계를 결정할 수 있는 수리적 조작 및 계산 능력을 평가한다. 이를 활용하여 정수근의 존재 여부를 도출하는 수리적 추론 능력을 점검한다.

문항 2 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오.	4점
	도함수 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$를 구함. $f'(x)=0$의 근 $x=-2$, $x=0$를 찾음. 구간 $(-\infty,-2)$에서 $f'(x)>0$이라서 $f(x)$가 증가하고, 구간 $(-2,0)$에서 $f'(x)<0$이라서 $f(x)$가 감소하고, 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)>0$이라서 $f(x)$가 증가함을 설명함. $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=4e^{-2}$과 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 구함.	
2-(2)	부등식 $a^2e^a<4e^{-2}<(a+1)^2e^{a+1}$과 $b^2e^b<e^{-1}<(b+1)^2e^{b+1}$을 만족시키는 정수 a,b를 모두 구하시오. (단, $2.7<e$)	9점
	$y=f(x)$와 직선 $y=4e^{-2}$이 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=e^{-1}$과는 서로 다른 세 점에서 만나는 2가지 경우로 구분함. ① 부등식 $a^2e^a<4e^{-2}<(a+1)^2e^{a+1}$: 정수 a는 $a\geq 0$임을 설명함. 부등식 $0<4e^{-2}<e$임을 언급함. 정수 $a=0$임을 구함. ② 부등식 $b^2e^b<e^{-1}<(b+1)^2e^{b+1}$: 정수 b가 구간 $(-\infty,-2)$와 구간 $(0,\infty)$에 구간 별로 한 개씩 존재함을 설명함. 부등식 $16e^{-4}<e^{-1}<9e^{-3}$을 언급함. 부등식 $0<e^{-1}<e$을 언급함. 정수 $b=-4,0$임을 구함.	
2-(3)	방정식 $f(x)=k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.	17점
	$0<k<4e^{-2}$일 때 서로 다른 세 실근, $k=4e^{-2}$일 때 서로 다른 두 실근, $k>4e^{-2}$일 때 한 개의 실근을 갖는 3가지 경우를 언급함. ① $0<k<4e^{-2}$인 경우 : 서로 다른 세 실근 중 $f(x)$가 감소하는 구간 $-2<x<0$에서 $x=-1$이 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x)=e^{-1}=f(-1)$의 다른 두 근 중 하나가 양수 α임을 설명함.	

하위 문항	채점 기준	배점
	문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0)=0<e^{-1}<e=f(1)$을 언급함. α는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k는 없다거나 서로 다른 세 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ② $k=4e^{-2}$인 경우 : 서로 다른 두 실근 중 $x=-2$가 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x)=4e^{-2}=f(-2)$의 다른 근이 양수 β임을 설명함. 문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0)=0<4e^{-2}<e=f(1)$을 언급함. β는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k는 없다거나 서로 다른 두 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ③ $k>4e^{-2}$ 인 경우 : 방정식 $f(x)=k$는 한 개의 양의 실근을 가짐을 설명함. 부등식 $f(1)=e>4e^{-2}$과 $x>0$일 때 $f(x)$가 증가함을 기술함. 최솟값 $k=e$를 구함.	

문항 2 - 예시 답안

[문항 2] 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

2-(1) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오.

[풀이]

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x$이므로 $f'(x)=0$이 $x=-2$, $x=0$을 근으로 갖는다. 구간 $(-\infty,-2)$에서 $f'(x)>0$이고 $f(x)$가 증가하며, 구간 $(-2,0)$에서 $f'(x)<0$이고 $f(x)$가 감소한다. 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$가 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=4e^{-2}$과 $x=0$에서 극솟값이 $f(0)=0$을 갖는다.

2-(2) 부등식 $a^2e^a<4e^{-2}<(a+1)^2e^{a+1}$과 $b^2e^b<e^{-1}<(b+1)^2e^{b+1}$을 만족시키는 정수 a,b를 모두 구하시오. (단, $2.7<e$)

[풀이]

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)\geq 0$이고 구간 $(-\infty,-2)$와 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$가 구간 $x<-2$ 또는 $x>0$에서 증가하고, 구간 $(-2,0)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$가 구간 $(-2,0)$에서 감소한다. $f(x)$의 그래프의 개형을 통해 $y=f(x)$는 직선 $y=4e^{-2}$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=e^{-1}$과는 서로 다른 세 점과 만난다.

(ㄱ) 주어진 부등식 $f(a)=a^2e^a<4e^{-2}<(a+1)^2e^{a+1}=f(a+1)$을 만족하는 정수 a는 $a\ge 0$이고 이 구간에서 한 개가 존재한다. 이때 무리수 e는 부등식 $2<e$을 만족하므로 $f(0)=0<4e^{-2}<e=f(1)$이다. 이로부터 구하는 정수 a는 0이다.

(ㄴ) 부등식 $f(b)<e^{-1}<f(b+1)$을 만족하는 정수 b는 구간 $(-\infty,-2)$와 구간 $(0,\infty)$에 구간 별로 한 개씩 존재할 수 있다. 이때 무리수 e는 부등식 $2.7<e<3$을 만족하므로 $16<2.7^3<e^3$이 성립한다. 따라서, $f(-4)=16e^{-4}<e^{-1}<9e^{-3}=f(-3)$와 $f(0)=0<e^{-1}<e=f(1)$가 성립한다. 이로부터 구하는 정수 b는 -4와 0이다.

2-(3) 방정식 $f(x)=k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.

[풀이]

$k>0$에 대하여 방정식 $f(x)=k$는 $0<k<4e^{-2}$일 때 서로 다른 세 실근을 갖고 $k=4e^{-2}$일 때 서로 다른 두 실근을 가지며 $k>4e^{-2}$일 때 한 개의 실근을 갖는다.

(ㄱ) $0<k<4e^{-2}$일 때 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 정수근을 가지려면 $f(x)$가 감소하는 구간 $-2<x<0$에서 $x=-1$이 항상 방정식의 근이 된다. 이때 $f(x)=e^{-1}=f(-1)$의 다른 두 근 중의 하나인 α는 양의 정수이어야 한다. 그런데 문항 (2)에 따라서 $f(0)=0<e^{-1}(=f(\alpha))<e=f(1)$이므로 α는 정수가 아니다. 그러므로 $0<k<4e^{-2}$에서 주어진 조건을 만족하는 k는 없다.

(ㄴ) $k=4e^{-2}$일 때 방정식 $f(x)=4e^{-2}$가 $x=-2$와 양의 실수 β를 근으로 갖는다. 문항 (2)에 따라서 $f(0)=0<4e^{-2}(=f(\beta))<e=f(1)$이므로 β는 정수가 아니다. 그러므로 $k=4e^{-2}$는 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ㄷ) $k>4e^{-2}$일 때 방정식 $f(x)=k$는 한 개의 양의 실근을 갖는다. $x>0$일 때 $f(1)=e>4e^{-2}$이고 $f(x)$가 증가하므로 조건을 만족하는 최솟값 k는 $x=1$일 때 $f(1)=e$이다.

문항 3

[문항 3] 좌표평면의 원 $x^2+y^2=16$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(2\sqrt{2},2\sqrt{2}),\mathrm{B}(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 두 점 A,B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)

(3) 좌표평면의 집합 $C=\{(\cos\theta-1,\sin\theta)\,|\,0\le\theta<2\pi\}$에 속하는 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1,\sin\theta)$에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $S(\theta)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $(M-m)^2$의 값을 구하시오.

문항 3 - 출제 의도

본 문제는 좌표평면의 원과 호의 관계로 표현되는 도형의 넓이에 대한 문제로 원과 직선의 관계로 주어진 문제를 이해하고 최댓값과 최솟값에 대한 조건을 수리적으로 추론한 후 이를 바탕으로 풀이를 기획하고 수행하는 수리적 문제 해결 능력을 평가하는 문제이다. 이 과정에서 좌표평면의 위 두 점 사이의 거리, 호의 길이, 삼각함수의 덧셈정리의 활용, 점과 직선 사이의 거리, 원과 직선의 위치 관계에 관한 수리적 개념의 이해와 종합적 활용 능력, 그리고 문제 해결을 위한 계산의 효율적 설계와 수행에 관한 계산 능력의 수월성을 평가한다.

3-(1) 평면의 위 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하는 문제로 수리적 개념의 이해와 조작 능력을 평가한다.

3-(2) 삼각함수의 성질을 활용하여 각을 구하고 호의 길이를 구하는 문제로 삼각함수의 덧셈정리의 조작적 활용 능력과 호의 길이에 대한 계산 능력을 평가한다.

3-(3) 원 위의 점에 관한 조건으로 정의되는 함수를 점과 직선 사이의 거리에 관한 문제로 이해하고 함수의 최댓값과 최솟값에 관한 문제를 원의 접선에 관한 문제로 해석하여 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다. 주어진 도형을 삼각형과 부채꼴에 관한 도형으로 분석하는 수리적 추론 능력과 조작 능력, 효율적 계산 능력을 평가하고, 제시된 조건을 수리적으로 조작하여 최댓값과 최솟값에 대한 원과 접선에 관한 추론을 바탕으로 최댓값과 최솟값의 차에 대한 계산을 수행하는 종합적인 수리적 능력을 평가한다.

문항 3 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2019	99-101, 112-122, 127-136, 144-148, 159-162
	수학	황선욱 외	미래엔	2019	111-113, 125-134, 139-142, 144-148, 157-161, 175-177
	수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2019	6575, 95-103
	수학 Ⅰ	권오남 외	교학사	2019	74-84, 97-104
	미적분	김원경 외	비상교육	2021	58-62
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2022	58-64

문항 3 - 문항 해설

이 문항은 원의 호와 두 선분으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최대・최소를 다루는 문제이다. 삼각함수의 꼴로 나타난 도형의 넓이를 호와 삼각형에 관한 문제로 분석하고 원의 접선에 관한 문제로 해석한 후 이를 바탕으로 직선과 점의 거리에 관한 문제로 문제 풀이를 기획하고 수행하는 수리적 능력을 평가하도록 출제되었다. 이 과정에서 고등학교 교과과정의 수학, 수학I, 미적분에서 습득한 원, 직선, 집합, 삼각함수에 관한 개념을 통합적으로 활용하여 넓이의 최대・최소문제를 해결하는 수리적 문제해결능력을 평가한다.

문항 3 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	두 점 A,B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.	4점
	두 점 A,B를 지나는 직선의 기울기 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$을 구함. 직선의 방정식 $y=-x+2\sqrt{6}$을 구함.	
3-(2)	호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)	8점
	두 선분 OA,OB가 x축과 이루는 각 α, β에 대하여 $\tan\alpha=1$과 $\tan\beta=2+\sqrt{3}$를 구함. 탄젠트함수의 덧셈정리를 활용하여 $\tan(\beta-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}}$을 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}$를 구함. 호 AB의 길이 $4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$를 구함.	
3-(2) 별해	선분 AB의 길이의 제곱이 $32-16\sqrt{3}$임을 바르게 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 γ에 대해 코사인법칙을 활용하여 $\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\gamma=\frac{\pi}{6}$를 바르게 구함. 호 AB의 길이 $4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$를 바르게 구함.	
3-(3)	좌표평면의 집합 $C=\{(\cos\theta-1,\sin\theta)\,\vert\,0\le\theta<2\pi\}$에 속하는 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1,\sin\theta)$에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $S(\theta)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $(M-m)^2$의 값을 구하시오.	18점
	호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이는 모두 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이와 선분 AB를 밑변으로 하고 집합 C의 한 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1,\sin\theta)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 합과 같음을 서술하고 이 삼각형의 넓이가 최대일 때 구하는 넓이 $S(\theta)$가 최대이고 삼각형의 넓이가 최소일 때 구하는 넓이도 최소임을 바르게 설명함. 집합 C의 점은 $(x+1)^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$으로 나타나는 원의 점임을 바르게 설명함. 집합 C가 나타내는 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선과의 거리가 최대인 h_1일 때 넓이 $S(\theta)$가 최대가 되고 거리가 최소인 h_2일 때 넓이 $S(\theta)$가 최소가 됨을 바르게 설명함. $S(\theta)$의 최댓값 M과 최솟값 m의 차 $M-m$이 선분 AB를 공통인 밑변으로 하고 높이가 h_1인 삼각형의 넓이와 높이가 h_2인 삼각형의 넓이의 차이이므로 $M-m=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot(h_1-h_2)$임을 바르게 설명함.	

하위 문항	채점 기준	배점
	직선 $x+\sqrt{3}y-(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=0$에서 원 $(x+1)^2+y^2=1$와의 거리가 최대 또는 최소가 되는 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위의 점이 이 원과 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$인 접선이 만나는 두 점임을 설명하고 이를 근거로 $h_1-h_2=2$를 바르게 구함. 선분 AB의 길이의 제곱 $32-16\sqrt{3}$을 구하여 $(M-m)^2=\left\{\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot(h_1-h_2)\right\}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2=32-16\sqrt{3}$를 바르게 구함.	

문항 3 - 예시 답안

좌표평면의 원 $x^2+y^2=16$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(2\sqrt{2},2\sqrt{2}),\mathrm{B}(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

3-(1) 두 점 A,B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

[풀이]

두 점 A,B를 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2\sqrt{2})+2\sqrt{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3}$,

즉 $x+\sqrt{3}y-(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=0$ 이다.

3-(2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)

[풀이]

두 선분 OA, OB가 x축과 이루는 각을 각각 α,β라고 하면 $\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1$이고

$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$이다. 탄젠트함수의 덧셈정리에 의해

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\frac{(2+\sqrt{3})-1}{1+(2+\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각이 $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$이다. 원의 반지름이 4이므로 호 AB의 길이는 $4\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$이다.

[별해]

선분 AB의 길이의 제곱을 구하면

$$\{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}^2+\{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\}^2=32-16\sqrt{3}$$ 이다.

두 선분 OA, OB가 주어진 원의 반지름이므로 두 선분의 길이는 모두 4이다. 두 선분 OA, OB가 이루는 각을 γ라 할 때 코사인 법칙에 의해

$$\cos\gamma = \frac{4^2+4^2-(32-16\sqrt{3})}{2\cdot 4\cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 따라서 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각이 $\gamma = \frac{\pi}{6}$이다. 원의 반지름이 4이므로 호 AB의 길이는 $4\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$이다.

3-(3) 좌표평면의 집합 $C = \{(\cos\theta-1, \sin\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$에 속하는 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1, \sin\theta)$에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $S(\theta)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $(M-m)^2$의 값을 구하시오.

[풀이]

호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이는 모두 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이와 선분 AB를 밑변으로 하고 집합 C의 한 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1, \sin\theta)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 합과 같다. 따라서 이 삼각형의 넓이가 최대일 때 구하는 넓이 $S(\theta)$가 최대이고 삼각형의 넓이가 최소일 때 구하는 넓이도 최소이다.

집합 C의 점은 $(x+1)^2+y^2 = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$으로 나타나는 원의 점이다. 집합 C가 나타내는 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선과의 거리가 최대인 h_1일 때 넓이 $S(\theta)$가 최대가 되고 거리가 최소인 h_2일 때 넓이 $S(\theta)$가 최소가 된다. 따라서 $S(\theta)$의 최댓값 M과 최솟값 m의 차 $M-m$은 선분 AB를 공통인 밑변으로 하고 높이가 h_1인 삼각형의 넓이와 높이가 h_2인 삼각형의 넓이의 차이이므로

$$M-m = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot h_1 - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot h_2 = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot(h_1-h_2)$$

이다. 직선 $x+\sqrt{3}y-(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=0$에서 원 $(x+1)^2+y^2=1$와의 거리가 최대 또는 최소가 되는 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위의 점은 이 원과 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$인 접선이 만나는 두 점이다. 이 두 접선이 직선 $x+\sqrt{3}y-(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=0$에 평행하고 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 반지름이 1이므로 $h_1 = h_2+2\cdot 1 = h_2+2$이다. 따라서 $h_1-h_2=2$이다. 선분 AB의 길이의 제곱이

$$\{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}^2+\{2\sqrt{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\}^2 = 32-16\sqrt{3}$$

이므로 구하는 값은

$$(M-m)^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot(h_1-h_2)\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot 2\right\}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 = 32-16\sqrt{3}$$ 이다.