2016학년도 논술고사

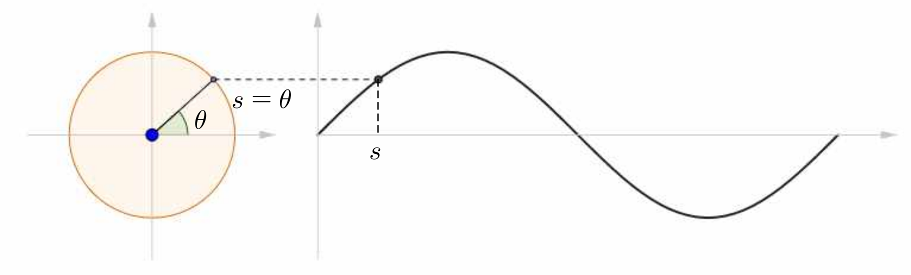
자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 반지름이 1이고 중심이 O인 원 위에서 한 점 P가 움직일 때 $\overline{\mathrm{OP}}$와 양의 x축이 이루는 각 θ와 P의 높이, 즉 P의 y좌표와의 관계를 함수로 나타내면 $y = \sin\theta$가 된다는 사실이 알려져 있다.

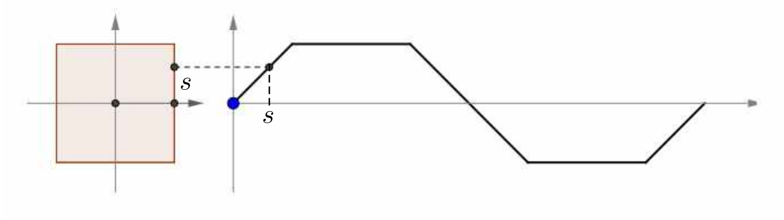


[그림 1]

한편 중심각이 θ인 원호의 길이 s는 $s=\theta$이므로 $(0,1)$에서 출발한 점이 시계바늘이 도는 방향의 반대방향으로 s만큼 이동하여 도달한 점 P의 높이 y를 s에 대한 함수로 나타내어도 $y=\sin s$가 된다. 이와 비슷하게 평면상에 어떤 도형 또는 그래프가 주어졌을 때 그 위를 움직이는 점의 이동한 거리와 도달한 점의 높이와의 관계를 함수로 나타내는 경우를 생각해 보자.

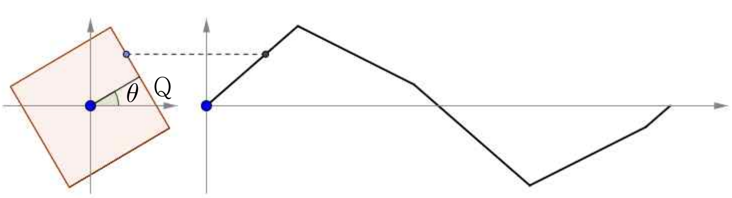
(나) 아래 그림과 같은 $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$을 네 꼭지점으로 하는 정사각형을 생각하자. 점 $(1,0)$에서 출발한 점이 시계바늘이 도는 방향의 반대 방향으로 s만큼 이동하여 점 P에 도달했을 때 P의 높이 y를 이동한 거리 s에 따른 함수로 나타내면 $0 \le s \le 8$ 구간에서 아래와 같고 이를 그래프로 그리면 [그림 2]와 같다.

$$f(s)=\begin{cases} s & 0 \le s \le 1 \\ 1 & 1 \le s \le 3 \\ 4-s & 3 \le s \le 5 \\ -1 & 5 \le s \le 7 \\ s-8 & 7 \le s \le 8 \end{cases}$$



[그림 2]

위 정사각형을 [그림 3]의 왼쪽 그림과 같이 θ만큼 회전시킨 도형을 R이라 하자. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) 이 도형이 양의 x축과 만나는 점 Q에서 출발하여 시계바늘이 도는 방향의 반대 방향으로 s만큼 이동하여 점 P에 도달했을 때, P의 높이를 함수 $h(s)$로 나타내면, [그림 3]의 오른쪽 그림과 같은 $h(s)$의 그래프를 얻을 수 있다. 이때 θ에 따라 $h(s)$의 그래프의 개형 및 $h(s)$의 최댓값이 달라짐을 관찰 할 수 있다.



[그림 3]

[문제 1-1] (10점) 좌표평면에서 $|x|+|y|=\sqrt{2}$를 만족하는 도형을 생각하자. 점 $(\sqrt{2},0)$에서 출발하여 시계바늘이 도는 방향의 반대방향으로 도형을 따라 s만큼 이동한 후 점 P에 도달 했을 때, P의 높이 $g(s)$를 $0 \le s \le 8$범위에서 구하시오.

[문제 1-2] (15점) 점 $(1,0)$에서 출발하여 $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{2}$의 그래프를 따라 x가 증가하는 방향으로 s만큼 이동하여 점 $\mathrm{P}(x,y)$에 도달하였다.

(1) 이 때 $\mathrm{P}(x,y)$의 y좌표를 이동한 거리 s에 대한 함수 $g(s)$로 나타내시오. (단, $s \ge 0$)

(2) 극한 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{g(s)}{s}$의 수렴성에 관해 논하시오.

[문제 1-3] (25점) 제시문 (나)에서 설명한 θ에 따라 변하는 도형 R 및 $h(s)$를 생각하자.

(1) $h(s)$의 최댓값을 θ에 대한 함수로 나타내시오.

(2) 구간 $0 \le s \le 8$ 에서 함수 $h(s)$의 그래프로 나타나는 곡선의 길이는 θ에 대한 함수이다. 이를 $\ell(\theta)$라 할 때 $\ell(\theta)$를 구하고 $\ell(\theta)$의 그래프가 가지는 모양에 관해 논하시오.

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

다음과 같이 0이상의 정수 두 개를 이용하여 표현할 수 있는 유한소수를 생각하자.

> 0이상의 정수 n과 m에 대하여 $\overline{n.m}$은 n을 소수점 앞에 적고, m을 소수점 아래에 적은 수이다. 예를 들어 $n=20$, $m=16$이면 $\overline{n.m}=20.16$, $\overline{m.n}=16.20=16.2$이고, $m=0$이면 $\overline{n.m}=n$이 된다.

이제 $\overline{n.m}$이 가지는 몇 가지 성질에 대해서 논의해 보자.

성질 1. 0이상의 네 정수 n, m, a, b에 대하여 $(n+1)(a+1)>\overline{n.m}\times\overline{a.b}\geq na$가 성립한다.

(증명) n과 m에 대하여 $n+1>\overline{n.m}\geq n$ 이 성립한다. 같은 이유로 $a+1>\overline{a.b}\geq a$도 성립하므로 부등식이 성립한다.

성질 2. $\overline{n.m}\times\overline{a.b}$가 자연수가 되기 위해서는 mb는 10의 배수여야 한다.

(증명) m을 α자리의 수, b를 β자리의 수라고 하면, mb의 일의 자리의 숫자와 $\overline{n.m}\times\overline{a.b}$의 소수점 $\alpha+\beta$ 아래의 숫자가 정확히 같다. 따라서 $\overline{n.m}\times\overline{a.b}$가 자연수이기 위해서는 소수점 아래의 숫자들은 모두 0이어야 하므로 mb는 10의 배수이다.

[문제 2-1] (10점) $1\leq n\leq 100$인 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\overline{n.n}\times\overline{(100-n).n}$을 정의하자. 예를 들어, $f(8)=8.8\times 92.8$이다. $f(n)$이 최대가 되도록 하는 n을 구하시오.

[문제 2-2] (15점) 두 정수 b, c에 대하여 $f(x)=10x^2+bx+10c$가 두 실수해 $\overline{n.m}$과 $\overline{m.n}$을 가진다고 한다. 이때 n, m은 10의 배수가 아닌 자연수이다. $\log_{10}\alpha=\overline{n.m}$, $\log_{10}\beta=\overline{m.n}$이라고 하면, $(c-b)\alpha\beta$를 10진법으로 표현했을 때 얻는 수의 맨 앞자리 숫자를 구하시오. (단, 상용로그표에 따르면 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}4=0.6021$, $\log_{10}5=0.6990$, $\log_{10}6=0.7782$, $\log_{10}7=0.8451$, $\log_{10}8=0.9031$, $\log_{10}9=0.9542$)

[문제 2-3] (25점) 0이상의 정수 n, m이 $n\geq m$을 만족한다. 정수 b와 두 자리의 자연수 c에 대하여 이차함수 $f(x)=100x^2+bx+100c$가 두 해 $\overline{n.m}$과 $\overline{m.n}$을 가진다고 하자.

(1) $m=0$일 때, 가능한 n을 모두 구하시오.

(2) $m>0$일 때, 가능한 (n, m)을 모두 구하시오.