2016학년도 논술고사

자연계열(오후) 모범답안

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 5

2016학년도 자연계열(오후) 모범답안

자연계열
(오후)

문항 1.

[문제 1-1] $0 \le s \le 2$일 때 $s^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$이므로 $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ 이다. 다른 구간에서도 비슷하게 생각하면, $g(s)$는 다음과 같다.

$$g(s) = \begin{cases} \frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \le s \le 2 \\ \frac{4-s}{\sqrt{2}} & 2 \le s \le 6 \\ \frac{s-8}{\sqrt{2}} & 6 \le s \le 8 \end{cases}$$

[문제 1-2]

(1)$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sqrt{x^2-1}$

이므로 $s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt = \int_1^x t\, dt = \frac{1}{2}(x^2-1)$.

따라서 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2s}$, $x = \sqrt{2s+1}$

$\mathrm{P}(x,y)$의 y좌표는 $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2s}\sqrt{2s+1} - \ln(\sqrt{2s+1} + \sqrt{2s}\right) = g(s)$

(2) $\frac{g(s)}{s} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sqrt{2+\frac{1}{2s}} - \frac{\ln(\sqrt{2s+1}+\sqrt{2s})}{s}\right)$

$k(x) = x - \ln x$라 하면 $k'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)}{x} > 0$, $(x > 1)$이므로 증가함수이고 $k(1) = 1 > 0$이므로 $k(x) > 0$ 즉, $\ln x < x$, $(x > 1)$. 이제 x 대신 $\sqrt{x}$를 대입하면 $\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$ 이제 $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

$$\frac{\ln(\sqrt{2s+1}+\sqrt{2s})}{s} < \frac{\ln(2\sqrt{2s+1})}{s} = \frac{\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2s+1)}{s} = \frac{\ln 2}{s} + \left(\frac{2s+1}{2s}\right)\frac{\ln(2s+1)}{2s+1} \to 0$$

따라서 $\lim_{s\to\infty}\frac{g(s)}{s} = 1$

[문제 1-3]

(1) $h(\theta)$의 최댓값은 R의 높이이므로, 꼭짓점의 높이를 계산하면 충분하다. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ $(0 \le \tan\theta \le 1)$일 때 회전변환을 생각하면 점 $(1,1)$은 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta\end{pmatrix}$ 에서 $(\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$로 이동된다.

따라서 $h(\theta)$의 최댓값은 $\sin\theta + \cos\theta$ 혹은 $\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, $\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

(2) 위의 회전변환으로부터 R의 각 꼭짓점의 위치를 확인해 보면

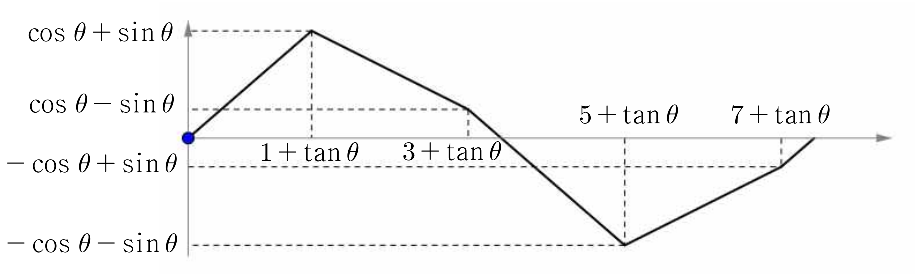
점 $(1,1)$은 $(\cos\theta - \sin\theta,\ \sin\theta + \cos\theta)$

점 $(-1,1)$은 $(-\cos\theta - \sin\theta,\ -\sin\theta + \cos\theta)$

점 $(-1,-1)$은 $(-\cos\theta + \sin\theta,\ -\sin\theta - \cos\theta)$

점 $(1,-1)$은 $(\cos\theta + \sin\theta,\ \sin\theta - \cos\theta)$

이므로, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$일 때 다음과 같은 그래프를 그릴 수 있다.



위의 그래프는 다섯 구간으로 나뉘어져 있고, 직선의 기울기의 절댓값을 보면 x축 방향의 길이가 2이면서 y축 방향의 길이가 $2\sin\theta$인 구간이 두 개, x축 방향의 길이가 2이면서 기울기가 $2\cos\theta$인 구간이 한 개, x축 방향의 길이가 $\tan\theta+1$이면서 기울기가 $2\cos\theta$인 구간이 한 개, x축 방향의 길이가 $1-\tan\theta$이면서 기울기가 $2\cos\theta$인 구간이 한 개이다. 양 끝 두 구간은 합쳐 생각하면 x축 방향의 길이가 2이면서 기울기가 $2\cos\theta$인 구간과 길이가 같다. 결국

$$\ell(\theta) = 4\left(\sqrt{\sin^2\theta + 1} + \sqrt{\cos^2\theta + 1}\right) \text{ (단, } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4})$$

이다. 한편, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때의 $h(s)$의 그래프는 $\frac{\pi}{2} - \theta$일 때의 $h(s)$의 그래프를 $s=4$를 기준으로 대칭하여 y축으로 반전시킨 함수의 그래프, 즉 $-h(8-s)$의 그래프와 같다. 즉, $\ell(\theta) = \ell(\frac{\pi}{2} - \theta)$이고,

$$\ell(\theta) = \ell\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 4\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 1} + \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 1}\right) = 4\left(\sqrt{1 + \sin^2\theta} + \sqrt{1 + \cos^2\theta}\right)$$

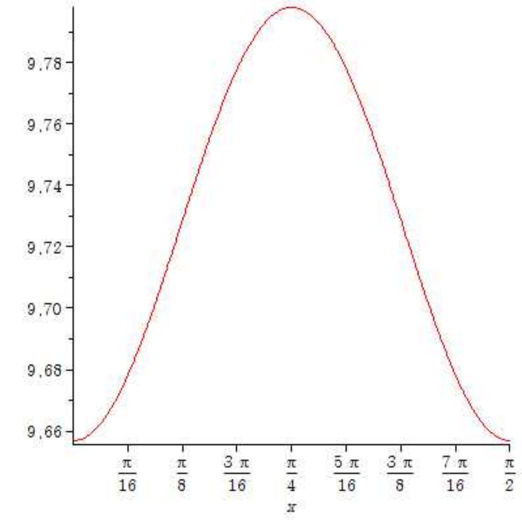
이므로, 이를 종합하면 모든 θ에 대해서 $\ell(\theta) = 4\left(\sqrt{1 + \sin^2\theta} + \sqrt{1 + \cos^2\theta}\right)$이다.

한편 이 함수를 미분하면 $\ell'(\theta) = \dfrac{4\sin\theta\cos\theta\left(\sqrt{\cos^2\theta + 1} - \sqrt{\sin^2\theta + 1}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta + 1}\sqrt{\sin^2\theta + 1}} \ge 0$ (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$)

이므로 $\ell(\theta)$는 구간 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 에서 증가한다. $\ell(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 중심으로 대칭이므로, $\ell(\theta)$는 구간 $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에서는 감소한다. 따라서 $\ell(\theta)$의 개형의 중요한 특성은 아래와 같다.

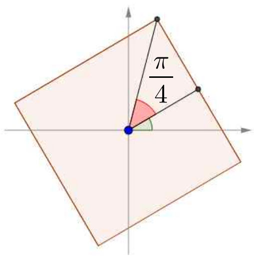
(i) $\theta = \frac{\pi}{4}$를 중심으로 좌우대칭

(ii) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 구간에서 증가 ($\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 구간에서 감소)

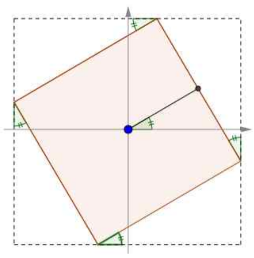


(별해)

(1) 아래 그림과 같이 생각하면 꼭짓점의 높이는 $\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sin\theta+\cos\theta$ 임을 알 수 있다.



(2) $h(s)$의 그래프를 그리기 위해 아래 그림과 같이 생각하면 s가 0에서 $1+\tan\theta$ 까지 움직일 때 y가 $\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sin\theta+\cos\theta$까지 움직임을 알 수 있다.



즉 기울기가 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\tan\theta}=\cos\theta$ 인 함수이다. 이후 s가 $3+\tan\theta$까지 움직일 때 y가 $2\sin\theta$만큼 감소하므로, 기울기가 $-\sin\theta$이다. 마찬가지로 세 번째, 네 번째 및 다섯 번째 구간에서 각각 기울기가 $-\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\theta$인 함수를 얻는다. 따라서 답과 같은 $h(s)$의 개형을 얻을 수 있다.

문항2.

[문제 2-1] 함수 $f(n)$을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\left(n+\dfrac{n}{10}\right)\left(100-n+\dfrac{n}{10}\right) & n<10\text{일 때,}\\ \left(n+\dfrac{n}{100}\right)\left(100-n+\dfrac{n}{100}\right) & n\geq 10\text{일 때.}\end{cases}$$

먼저 $n=100$이면, $f(n)=100*0.1=10$이다.
그리고 $n<10$이면, (성질 1)을 참고하면, $f(n)<(n+1)(100-n+1)\leq 10\times 100=1000$ 이다.
이제 $10\leq n\leq 99$일 때의 최댓값을 구해보자. 준식을 정리하면 $f(n)=-\dfrac{101\cdot 99}{10000}n^2+101n$ 이다. 이 식은 $n_0=\dfrac{10000}{2\cdot 99}=50.505\cdots$ 에서 최대가 된다. 한편 $f(n)$은 2차 함수로 최댓값을 기준으로 좌우대칭이 되므로, n_0에 가장 가까운 정수는 $n=51$이고, 이때 $f(n)$의 값은 1000보다 크다. 따라서 답은 51.

[문제 2-2] 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=\overline{n.m}+\overline{m.n}=-\frac{b}{10} \qquad \text{(a)}$$

$$\log_{10}\alpha\cdot\log_{10}\beta=\overline{n.m}\times\overline{m.n}=c \qquad \text{(b)}$$

가 성립한다. 한편 (b)와 성질2에 의해 nm은 10의 배수이고, n, m은 모두 10의 배수가 아니므로 둘 중 하나는 5의 배수, 하나는 2의 배수여야 한다. 따라서 한 수의 일의 자릿수는 5이고 나머지 한 수의 일의 자리 수는 짝수이다. (a)에서 $\overline{n.m}+\overline{m.n}$이 소수점 한자리까지 허용되는 수이므로 n, m이 두 자리수 이상이라면 반드시 자리 올림이 일어나야 하지만, 두 수의 일의 자리수의 합이 절대 10이 될 수 없으므로 반드시 n, m은 한자리 수여야 한다. 이제 가능한 (n,m)을 생각하면 $(2,5),(4,5),(6,5),(8,5)$와 그 대칭인 조합들이 가능한데, 이중 $\overline{n.m}\times\overline{m.n}$이 10의 배수가 되는 수는 $(2,5)$ 혹은 $(5,2)$ 뿐이다. 이때 $b=-77$, $c=13$. 따라서

$$\log_{10}(c-b)\alpha\beta=\log_{10}(c-b)+\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=\log_{10}90+\overline{n.m}+\overline{m.n}=1.9542+7.7=9.6542$$

이다. 즉, $(c-b)\alpha\beta=10^9\times\gamma$ (단, $1<\gamma<10$)이고 $\log_{10}\gamma=0.6542$이다. 한편, 문제에서 $\log_{10}4=0.6021$, $\log_{10}5=0.6990$가 성립하므로 $4<\gamma<5$이 되므로 문제의 답은 4이다.

[문제 2-3]

(1) 문제의 조건에서 $\overline{n.m}\times\overline{m.n}$는 두 자리의 자연수가 되어야 한다. 만일 $m=0$이면, $\overline{n.m}\times\overline{m.n}=\dfrac{n^2}{10^k}$ (단, k는 n의 자릿수)가 된다. 따라서 n^2이 10^k의 배수여야 한다. 따라서 n은 10의 배수. 이 경우 $\dfrac{n^2}{10^k}$이 두 자리의 자연수가 되는 경우는 n이 100, 200, 300, 40, 50, 60, 70, 80, 90일 때뿐이다. 따라서 가능한 (n,m)은 $(100,0)$, $(200,0)$, $(300,0)$, $(40,0)$, $(50,0)$, $(60,0)$, $(70,0)$, $(80,0)$, $(90,0)$이고 이 경우 모두 대응되는 b는 정수가 된다.
따라서 답은 $(100,0)$, $(200,0)$, $(300,0)$, $(40,0)$, $(50,0)$, $(60,0)$, $(70,0)$, $(80,0)$, $(90,0)$ 이다.

(2) 만일 $m=1$이면 $\overline{n.m}\times\overline{m.n}$은 정수가 될 수 없다. 따라서 $n\geq m>1$이라고 가정해도 무방하다. 한편, n, m이 모두 10이상이면 성질1에 의해 $\overline{n.m}\times\overline{m.n}>nm\geq 100$ 이므로 문제 조건을 만족하지 않는다. 따라서 m은 반드시 한자리 수이다. 즉, $m\leq 9$.

1) $n\leq 9$인 경우 : $\overline{n.m}\times\overline{m.n}=\left(n+\frac{m}{10}\right)\left(m+\frac{n}{10}\right)=\frac{101}{100}nm+\frac{1}{10}(n^2+m^2)$ 이고, 이 값이 자연수 이므로 nm은 반드시 10의 배수여야 한다. 따라서 둘 중 하나는 5여야 하고 가능한 조합은 $(n,m)=$ $(5,4)$, $(5,2)$, $(6,5)$, $(8,5)$ 뿐이다. 이 중 그 곱이 자연수가 되는 것은 $(n,m)=(5,2)$이다. 이 경우 $\overline{n.m}\times\overline{m.n}=13$이므로 c는 두 자리 자연수이고, 대응되는 b 역시 정수이다.

2) $n\geq 10$인 경우 : $N=\overline{n.m}\times\overline{m.n}=\left(n+\frac{m}{10}\right)\left(m+\frac{n}{100}\right)$이고 성질 2에 의해 nm은 10의 배수이고, $nm\leqq 90$이어야 한다. 만일 n이 10의 배수라면, n^2은 100의 배수가 된다. 따라서 $10m^2+\frac{nm}{10}$이 100의 배수가 되어야 하는데 $\frac{n}{10}=\ell=1,2,\ldots,9$ 중 하나이므로, $10m^2+\ell m=m(10m+\ell)$가 100의 배수가 되는 한 자릿수 m, ℓ을 찾으면 된다. 이러한 m, ℓ는 존재하지 않는다. 따라서 n은 10의 배수가 아니므로 m은 짝수 혹은 5가 되어야 한다.

$m=5$라면 $nm\leqq 90$에서 $n=12,14,16,18$ 이다. 이 중 성립하는 것은 $(n,m)=(12,5)$. 실제 $5.12\times 12.5=64$이므로 두 자리의 자연수이다. 이 경우 대응되는 b역시 정수이다.

m이 짝수라면, $m=2,4,6,8$이고 n의 일의 자릿수는 5여야 한다.

$m=2$: n은 15, 25, 35, 45만 가능하다. 성립하는 것은 없다.

$m=4,6$: n은 15만 가능하다. 성립하는 것은 없다.

$m=8$: $nm\geq 8\times 15>100$이므로 성립하지 않는다.

따라서 답은 $(n,m)=$ $(5,2)$, $(12,5)$이다.

(참고) (2)에서 c가 세 자리 자연수가 되는 경우는 $(6,25)$가 있다.