# 2016학년도 논술고사

# 자연계열(오전)

| | |
|---|---|
| 성 명 | |
| 전 형 | |
| 수험번호 | |

표지를 제외한 페이지 수 : 4

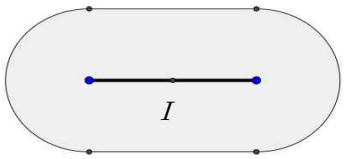
# 2016학년도 자연계열(오전) 논술고사

**자연계열 (오전)**

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 컴퓨터에서 글자폰트를 저장할 때, 문자를 그림의 형태로 저장하는 것 보다 문자의 골격만 저장해서 일정한 방식으로 되살리는 기법을 사용하면 훨씬 적은 저장용량을 사용할 뿐 아니라, 문자의 변형이나 확대 · 축소에도 용이하다. 골격으로부터 폰트를 되살리는 방법으로는 문자의 골격을 중심으로 적당한 두께를 가진 도형을 만드는 방식이 주로 쓰인다. 이를 수학적으로 이해해 보자.

점 P와의 거리가 1이하가 되는 점들의 집합을 $C(\mathrm{P})$라고 하고 평면상의 도형 $F$에 대하여 점 P가 $F$위를 움직일 때 $C(\mathrm{P})$가 지날 수 있는 영역을 $C(F)$로 표기하자. 예를 들어 $F$가 선분 $I$라면 $C(I)$는 [그림 1]과 같은 모양이 된다.

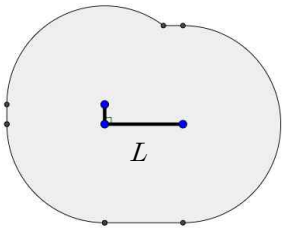



[그림 1]

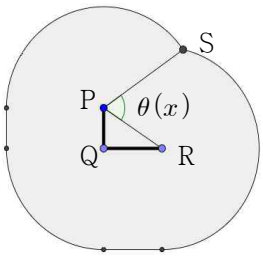
이때 $C(I)$의 둘레는 두 개의 선분과 두 개의 반원으로 이루어져 있다. $C(I)$의 둘레를 구성하는 두 선분은 $I$와 거리가 1인 평행선 상에 존재하고 그 길이는 $I$의 길이와 같다. 또한 $C(I)$를 구성하는 곡선은 $I$의 끝점 중 하나와의 거리가 1이므로 $I$의 끝점을 중심으로 하는 반원이 된다.

한편, 일반적인 도형 $F$에 대해서 $C(F)$의 둘레 위에 있는 점 P를 고정하였을 때, $F$위를 움직이는 점 Q에 대한 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 항상 1이다.

(나) 문자 ㄴ을 표현하기 위한 문자의 골격은 두 개의 선분이 수직으로 만나는 모양이다. 길이가 $x$, $1-x$ (단, $0<x\leq\frac{1}{2}$)인 두 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$이 점 Q에서 수직으로 만나서 생기는 도형 $L$를 중심으로 하는 $C(L)$을 생각하자. $C(L)$의 둘레의 모양은 $x$가 적당히 작은 값 일 때는 [그림 2]와 같이 세 개의 원호와 세 개의 선분으로 이루어진 모양이고, $x$가 적당히 큰 값 일 때는 [그림 3]과 같이 세 개의 원호와 두 개의 선분으로 이루어진 모양이다.

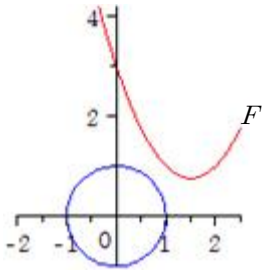



[그림 2]




[그림 3]

**[문제 1-1]** (10점) 평면상에서 식 $y=x^2-3x+3$을 만족하는 점들의 집합을 $F$라 하자. 점 P가 원점O를 중심으로 하는 반지름 1인 원 $C(O)$위를 움직이고 점 Q가 $F$위를 움직일 때, $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하시오.




**[문제 1-2]** (15점) 아주와 수시는 위 제시문을 읽고 다음과 같이 대화를 나누었다.

> 아주 : 문자 ㅁ을 만들기 위해선 사각형 모양의 도형 $F$가 필요해.
> 수시 : 그렇지. 도형 $F$가 사각형이라도 $C(F)$가 $F$의 내부를 덮어 버릴 수 있어서 항상 ㅁ형태가 되는건 아니지만 사각형 $F$에 대한 $C(F)$를 생각해 보는 건 재밌는 것 같아. 0보다 큰 $x$에 대하여 $F$가 한 변의 길이가 $x$인 내부가 비어있는 정사각형 이라면 $C(F)$의 넓이는 ① 이 되어서 $x$에 따라 변하게 돼.
> 아주 : 이 경우에는 $x$가 증가할수록, 즉 $F$의 둘레의 길이가 길어질수록 $C(F)$의 넓이도 증가하겠구나. 일반적으로 ②내부가 비어 있는 두 개의 닮은 직사각형 $F$와 $G$에 대해서 $F$의 둘레의 길이가 $G$의 둘레의 길이보다 길면 $C(F)$의 넓이가 $C(G)$의 넓이보다 크게 되는 것 같아.
> 수시 : 맞아. 두 직사각형이 닮지 않았더라도 ③내부가 비어 있는 두 직사각형 $F$와 $G$에 대해서 $F$의 둘레의 길이가 $G$의 둘레의 길이보다 길면 $C(F)$의 넓이가 $C(G)$의 넓이보다 크게 돼.

(1) ①에 들어갈 식을 구하시오.
(2) 아주와 수시의 대화를 보고 ②, ③의 주장이 맞으면 증명하고, 틀리면 반례를 찾으시오.

**[문제 1-3]** (25점) 제시문 (나)에서 설명한 $x$에 대한 $C(L)$이 [그림 3]과 같이 그 둘레가 두 개의 선분과 세 개의 원호로 구성되는 경우를 생각하자. 이때 원호끼리 만나는 점을 S라 하고, 선분 $\overline{PR}$과 선분 $\overline{PS}$가 이루는 각은 $x$에 대한 함수로 쓸 수 있다. 이를 $\theta=\theta(x)$라 하면 $\theta$는 $\frac{\pi}{4}$와 $\frac{\pi}{2}$사이의 각이 된다.

(1) $\alpha \le x \le \frac{1}{2}$의 범위에서 $C(L)$이 [그림 3]의 모양이 되고, $0<x<\alpha$에서는 [그림 2]의 모양이 될 때, $\alpha$를 구하시오.

(2) (1)에서 정의된 $\alpha$에 대하여 $\alpha \le x \le \frac{1}{2}$일 때, $\cos(\theta)$를 $x$에 대한 함수로 나타내고 이를 이용하여 $C(L)$의 넓이를 $\theta$에 대한 함수로 나타내시오.

(3) (1)에서 정의된 $\alpha$에 대하여 $\alpha \le x \le \frac{1}{2}$일 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

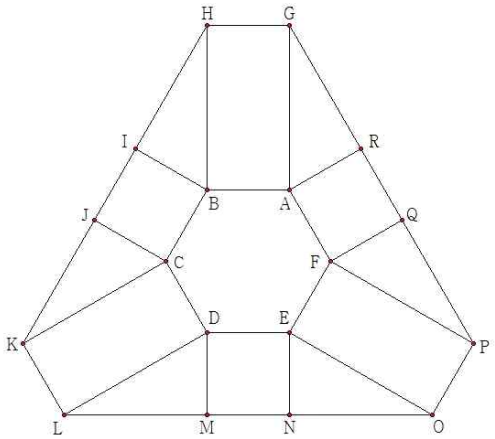
$g(x)$는 "$x$에 의해 결정되는 $C(L)$의 넓이"이다.

이때 $x$에 대한 $g(x)$의 증가·감소를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

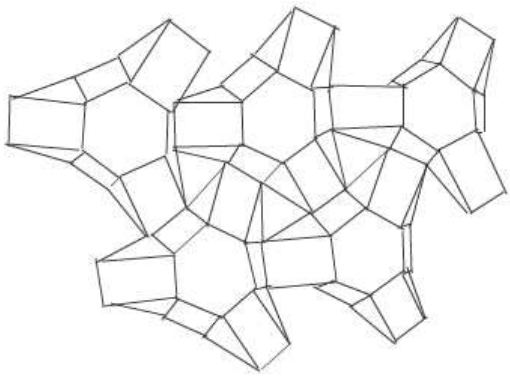
**[문항2]** 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

어떤 구조물을 만들 때 도형을 접을 수 있게 만들면 구조물의 모양과 크기를 적당히 조절할 수 있어서 여러 분야에서 활용도가 높다. 실제 산업에서 쓰이는 구조물을 수학적으로 분석해 보자.

한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF의 서로 인접하지 않은 세 변을 택하여 한 변의 길이가 1인 정사각형 AFQR, CBIJ, EDMN을 붙이자. 직사각형 BAGH, DCKL, FEOP를 나머지 세 변에 붙여서 H, I, J, K가 한직선 상에 있고, 마찬가지로 L, M, N, O 및 P, Q, R, G도 각각 일직선 위에 있도록 만들면 [그림 1]과 같은 전개도를 가진 도형이 얻어진다. 이때 선이 있는 부분을 접을 수 있게 만들면, 이 도형 여러 개를 이어 붙여 [그림 2]와 같은 기동성있는 구조물을 만들 수 있다.

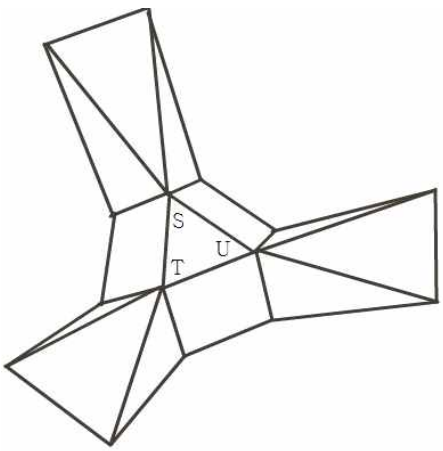



[그림 1]

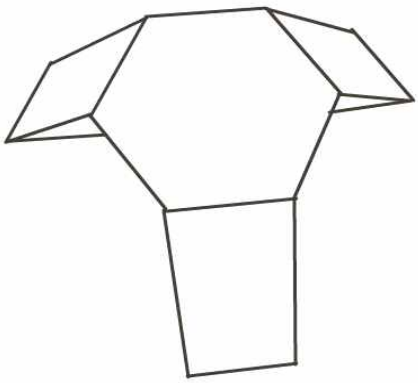


[그림 2]

[그림 1]의 전개도를 선을 따라 접어서 R과 I, J와 M, N과 Q가 각각 만나게 겹쳐 [그림 3]처럼 만들 수 있다. [그림 3]에서 R과 I가 겹쳐서 생긴 점을 S, J와 M이 겹쳐서 생긴 점을 T, N과 Q가 겹쳐서 생긴 점을 U라 했을 때 △STU는 정삼각형이 된다. 이때 구조물을 다른 시각에서 보면 [그림 4]와 같이 보인다.

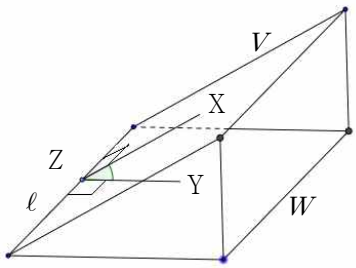



[그림 3]



[그림 4]

이런 입체도형을 다룰 때 이면각의 개념은 많은 도움이 된다. 직선 $\ell$을 공유하는 두 반평면 $V$, $W$로 이루어진 도형을 **이면각**이라 하며, 직선 $\ell$을 이면각의 변, $V$, $W$를 이면각의 면이라 한다. 이면각의 변 $\ell$ 위의 한 점 Z를 지나고 $\ell$에 수직인 두 선분 ZX와 ZY를 각각 $V$, $W$ 위에 그리면 $\angle XZY$의 크기는 점 Z의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.




[그림 5]

**[문제 2-1]** (20점) [그림 1]의 두 면 AFQR과 ABCDEF가 [그림 3]처럼 접힌 후 생기는 이면각의 크기 $\alpha$와 이때 새롭게 만들어지는 삼각형 ABS와 면 ABCDEF의 이면각의 크기를 $\beta$라 할 때 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$를 구하여라.

**[문제 2-2]** (10점) [그림 1]의 전개도를 [그림 3]처럼 접었을 때 생기는 정삼각형 STU를 포함하는 평면은 면 ABCDEF를 포함하는 평면과 평행하다. 점 S와 면 ABCDEF를 포함하는 평면사이의 거리를 구하여라.

**[문제 2-3]** (20점) [그림 1]의 전개도를 [그림 3]처럼 접어서 만들어진 입체도형을 [그림 4]처럼 뒤집어 $xy-$평면 위에 세우면 면 ABCDEF의 모든 점의 높이, 즉 $z-$좌표는 동일하다. 이 값을 구하여라.