2016학년도 논술고사

자연계열(오전) 모범답안

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 :

2016학년도 자연계열(오전) 모범답안

자연계열 (오전)

[문항1]

[문제1-1] 원 $C(\mathrm{O})$위를 움직이는 점 P와 곡선 F위를 움직이는 점 Q를 생각했을 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최솟값을 가질 때는 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 연장한 직선이 원의 중심(원점)을 지나야 한다. 따라서 원점 O에서 F위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 최솟값을 구하면 충분하다. 원점과 곡선위의 점 $\mathrm{Q}(x,y)$사이의 거리를 x에 대한 함수 $d(x)$로 놓으면,

$$d(x)^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (x^2 - 3x + 3)^2$$

이다. 함수의 최솟값은 그 함수의 극솟값에서 나온다. 이 함수의 극솟값을 구하기 위해서 x로 미분해보면 $2(x-1)(2x^2 - 7x + 9)$이 되므로 $x = 1$이 유일한 극값이다. $x = 1$에서 $d(x)^2 = 2$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최솟값은 $\sqrt{2} - 1$이다.

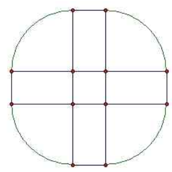
(별해) 곡선 F 위의 한 점 $\mathrm{Q}(\mathrm{a,b})$에서의 법선이 원점을 지날 때, 이 법선과 원 $C(\mathrm{O})$의 교점 중 포물선에 가까운 점을 R라 하면 $\overline{\mathrm{RQ}}$가 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다. $y = f(x) = x^2 - 3x + 3$의 $\mathrm{Q}(\mathrm{a,b})$에서의 접선의 기울기는 $f'(x) = 2x - 3$ 이므로 $f'(a) = 2a - 3$. 법선은 접선에 수직이므로 기울기는 $-\dfrac{1}{2a-3}$.

따라서 법선의 방정식은 $y - f(a) = -\dfrac{1}{2a-3}(x-a)$. 이 식이 원점$(0,0)$을 지나므로

$0 - f(a) = -\dfrac{1}{2a-3}(0-a)$ 에서 $(2a-3)(a^2-3a+3) = -a$. 정리하면

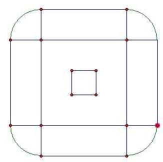
$2a^3 - 9a^2 + 16a - 9 = (a-1)(2a^2 - 7a + 9) = 0$에서 $a = 1$이 유일한 근이고, 따라서 $\mathrm{Q}(1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}} = \sqrt{2}$이고, 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\sqrt{2} - 1$이다.

[문제 1-2] (1) $x \le 2$ 일 때 내부가 모두 채워지므로 그 넓이는



(정사각형 외부의 넓이) + (정사각형의 넓이), 정사각형 외부의 넓이는 $4x + \pi$이고

정사각형의 넓이는 x^2이므로 구하는 넓이는 $x^2 + 4x + \pi$



$x \ge 2$일 때 내부에 정사각형 만들어지고 구하는 넓이는 (정사각형 외부의 넓이) + (정사각형의 넓이) - (내부의 정사각형의 넓이) 한편 내부의 정사각형의 한 변의 길이는 $x-2$ 이므로, $4x + \pi + x^2 - (x-2)^2 = 8x + \pi - 4$ 따라서

$$① = \begin{cases} x^2 + 4x + \pi, & x \le 2\text{일 때} \\ 8x + \pi - 4, & x \ge 2\text{일 때} \end{cases}$$

(2) 명제 ②는 참: 각 변의 길이가 ar, br인 직사각형의 외부도형의 넓이는 $2(a+b)r + \pi$,

둘레의 길이는 $2(a+b)r$ 이므로 r에 대한 증가함수.

(i) 내부가 비어있는 경우 넓이는 $\{\mathrm{abr}^2 - (\mathrm{ar}-2)(\mathrm{br}-2)\} + \{2(\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{r} + \pi\} = 4(\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{r} + \pi - 4$

(ii) 내부가 채워진 경우 넓이는 $abr^2 + 2(a+b)r + \pi$

(i),(ii)로부터 넓이는 r에 대한 증가함수이므로 ②는 참.

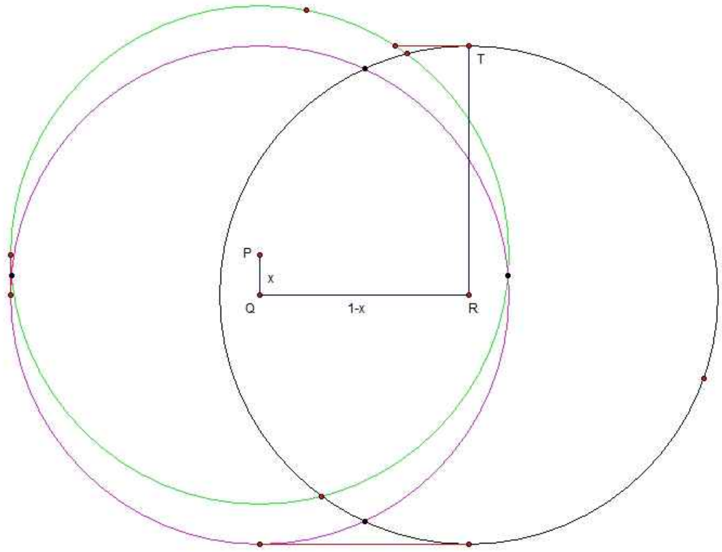
명제 ③은 거짓: 반례를 들어야 한다. 예를들어

변의 길이	F의 둘레의 길이	$C(F)$의 넓이
4,4,4,4	16	$28 + \pi$
8,1,8,1	18	$26 + \pi$

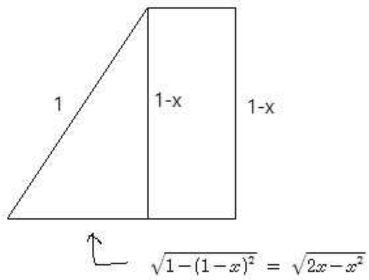
[문제 1-3] (1) 점 R을 중심으로 하는 단위원과 R로부터 거리가 1인 평행선이 만나는 점을 T라 하자. $C(L)$의 개형이 [그림 3]과 같기 위해선
$\overline{\mathrm{PT}} = \sqrt{2}(1-x) \le 1$이어야 한다.
따라서,

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{2}$$

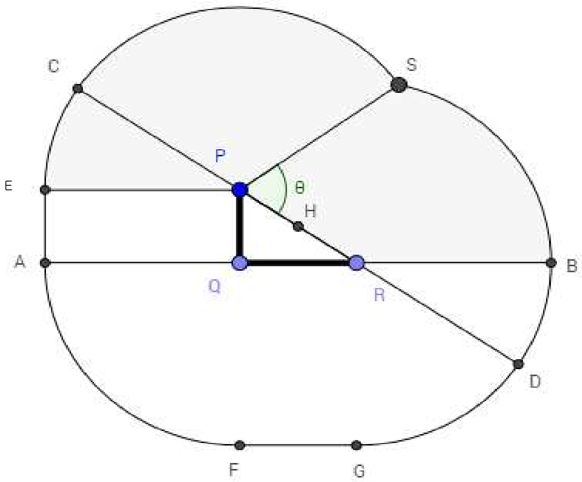
인 범위에서 [그림 3]의 개형이 나타난다.



(별해) 위쪽 선분의 길이가 0보다 크면 [그림2] 가 되므로
$1-x - \sqrt{1-(1-x)^2} = 1-x - \sqrt{2x-x^2} \ge 0$. 따라서
$0 < x \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 결국 [그림3]이 되기 위해서는
$1-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{2}$.



(2) 선분 QR을 연장하여 $C(L)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 선분 PR을 연장하여 $C(L)$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 그리고 P를 지나며 $\overline{\mathrm{QR}}$과 평행한 직선과 $C(L)$와 만나는 점 중에 A와 가까운 점을 E라 하고, Q, R을 지나면서 $\overline{\mathrm{AB}}$와 수직인 선들과 $C(L)$가 만나는 점을 각각 F, G라 하자.



이때 각 $\angle CPE = \angle DRB$ 이므로 부채꼴 PEC와 부채꼴 RDB의 넓이는 서로 같다. 따라서 이 도형의 위와 같이 색칠된 부분의 넓이는 원 $C(\mathrm{P})$와 $C(\mathrm{R})$이 이루는 도형의 절반과 같다. 한편 $\overline{\mathrm{PR}}$의 중점을 H라 하면, 원의 성질에서 $\overline{\mathrm{SH}}$는 $\overline{\mathrm{PR}}$을 수직이등분 한다. $\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{x^2+(1-x)^2}$, $\overline{\mathrm{PS}} = 1$이므로

$$\cos\theta = \overline{\mathrm{PH}} = \frac{\sqrt{x^2+(1-x)^2}}{2} \qquad (*)$$

이다. 따라서 색칠된 영역의 넓이는

$$2\times\frac{\pi-\theta}{2} + 2\times\frac{\overline{\mathrm{SH}}\times\overline{\mathrm{PH}}}{2} = \pi-\theta+\cos\theta\cdot\sin\theta = \pi-\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}$$

이제 $C(L)$의 나머지 부분의 넓이를 구한다. 두 부채꼴의 넓이의 합은 $\frac{\pi}{2}$이고 두 직사각형의 넓이의

합은 $x+1-x=1$이고, 삼각형의 넓이가 $\frac{x(1-x)}{2}$이다. (*)에서 $(2\cos\theta)^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x+1$이므로 반각공식 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$을 쓰면 $4\frac{1+\cos 2\theta}{2} = 2x(x-1)+1$ 정리하면 $\frac{x(1-x)}{2} = -\frac{\cos(2\theta)}{2} - \frac{1}{4}$이므로 $C(L)$의 넓이 $S(\theta)$는

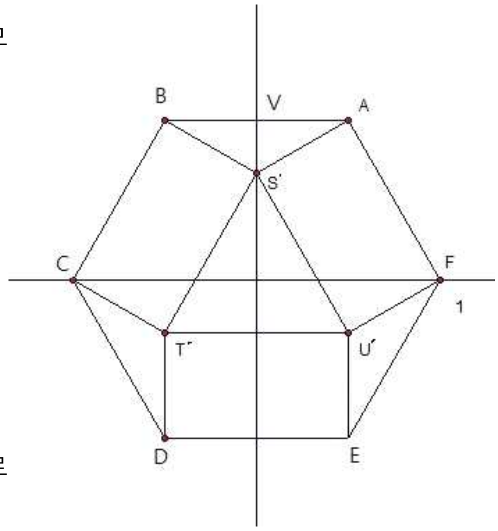
$$S(\theta) = \pi - \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\pi - \theta + \frac{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)}{2}$$

따라서 $S(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\pi - \theta + \frac{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)}{2}$.

(3) (2)에서 구한 $S(\theta)$를 θ에 대해 미분하면 $-1+\cos(2\theta)+\sin(2\theta) = -1 + \sqrt{2}\sin(2\theta + \frac{\pi}{4})$가 된다. $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $\frac{3\pi}{4} < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$ 이므로 $|\sin(2\theta + \frac{\pi}{4})| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 따라서 $S'(\theta) < 0$이므로 $S(\theta)$는 θ에 대한 감소함수이다. 한편 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 범위에서 $\cos x$는 감소함수이므로, 역시 (2)번에서 구한 (*)에서 x가 커지면 θ도 커지고 그 역도 성립한다. 따라서 $g(x) = S(\theta)$는 x가 커지면 감소한다.

[문항2]

[문제 2-1]



오른쪽 그림과 같이 제시문의 [그림 3]을 위에서 내려다 본 모양을 생각하자. 면 ABCDEF는 정6각형이므로 좌표평면에

$F(1,0)$, $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$C(-1,0)$, $D(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $E(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

S', T', U'은 S, T, U의 정사영이 되게 놓자. 그러면 사각형 $AS'U'F$, $BS'T'C$, $DT'U'E$ 는 직사각형이다.

$\angle BAF = 120°$, $\angle S'AF = 90°$이므로 $\angle S'AB = 30°$

이제 $\overline{S'A} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\cos 30°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 이면각의 크기의 정의로부터 $1 \times \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 또한 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\overline{S'V} = \overline{AS'}\sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$이므로 이면각의 크기의 정의로부터 $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$이므로 $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ 을 얻는다.

따라서 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ 이다.

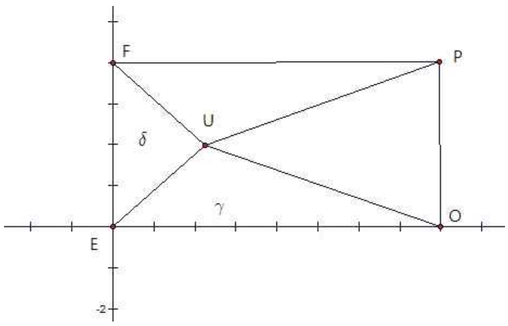
[문제 2-2]

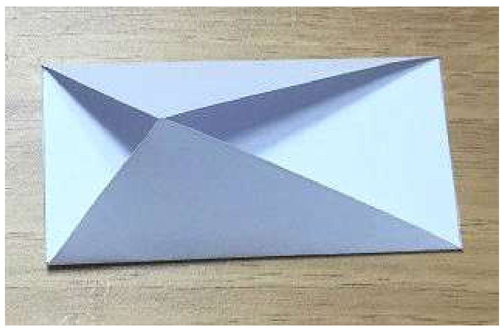
점 S의 면 ABCDEF로의 정사영을 S'이라 하면 $\triangle SAS'$은 직각삼각형이고, 점 S와 면 ABCDEF를 포함하는 평면사이의 거리는

$$\overline{AR}\sin\alpha = 1 \times \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

[문제 2-3]

입체도형 U−EFPO의 모양은 오른 쪽과 같으며 EFPO를 밑변에 두고 수직으로 위에서 바라본 모양을 평면에 나타내면 다음과 같다.





δ와 γ 를 각각 면 EFPO와 삼각형 EFU 및 EOU와 만들어지는 평면과의 이면각이라 하면,

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta = \frac{1}{2}$ 에서 $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(참고 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma = \frac{1}{2}$ 에서 $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

따라서 U의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sec^2\delta - 1}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

면 EFPO와 면 ABCDEF 의 이면각은 $\beta + \delta$ 이다.

따라서 $\cos(\beta + \delta) = \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{1-\frac{1}{9}}\sqrt{1-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

이제 구하는 면 ABCDEF의 모든 점의 높이는

$2\cos(\beta + \delta - 90°) = 2\sin(\beta + \delta) = 2\sqrt{1-\cos^2(\beta + \delta)} = 2\sqrt{1-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$