계 열 문 항 1

<가>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<나>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<다>
어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차함수 $y=x^2+a$와 무리함수 $y=\sqrt{x+1}$이 열린구간 $(1,3)$에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

1-2. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수라고 하자. 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,1)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|<1$을 만족시킬 때, $f(c)=2c$인 c의 개수가 닫힌구간 $[0,1]$에서 하나 이하로 존재함을 귀류법을 이용하여 증명하시오.

계 열 문 항 2

<라>

두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다. 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대해 대칭이므로 $\sin(-x)=-\sin x$이고, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대해 대칭이므로 $\cos(-x)=\cos x$이다. 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, 임의의 실수 x에 대하여

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\ \cos(x+2n\pi)=\cos x \quad (\text{단, } n\text{은 정수})$$

가 성립한다.

<마>

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

1. $r \neq 1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이고,
2. $r=1$일 때, $S_n=na$이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x)=e^{-x}$은 실수 전체의 집합에서 정의된 지수함수이다.

2-1. $0 \leq x \leq 2\pi$일 때, 부등식 $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$을 풀고, 해당하는 x의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$의 정적분의 값을 구하시오.

2-2. $0 \leq x \leq 100\pi$일 때, 부등식 $\sin x \leq -\dfrac{1}{2}$에 해당하는 x의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$의 정적분의 값이 $\left(e^{\frac{5\pi}{6}}-e^{\frac{\pi}{6}}\right)k$가 되는 실수 k의 값을 구하시오.

계 열 문 항 3

<바>

함수 $f: X \rightarrow Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $y=f(x)$인 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다. 이때 Y의 각 원소 y에 $y=f(x)$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f의 역함수라 하고, 기호로

$$f^{-1}: Y \rightarrow X,\ x=f^{-1}(y)$$

와 같이 나타낸다.

<사>

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\, a\neq 1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수를 갖는다. 이때 로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$$

이므로, $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

$$y=\log_a x\ (a>0,\, a\neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 하며 다음과 같은 성질을 갖는다.

1. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
2. $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
3. 그래프는 점 $(1,0)$을 지나고, y축을 점근선으로 갖는다.

특히, a가 자연상수 $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$인 경우에 자연로그라 하고, $y=\ln x$로 나타낸다.

제시문 <바>와 <사>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$의 역함수를 $y=g(x)$라고 하자.

3-1. $x>0$에 대하여 $f(x)>x$임을 보이시오.

3-2. $y=g(x)$의 그래프를 그리시오.