계 열 문 항 1

<가>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<나>
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<다>
어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차함수 $y=x^2+a$와 무리함수 $y=\sqrt{x+1}$ 이 열린구간 $(1,3)$에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

1-2. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수라고 하자. 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,1)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|<1$을 만족시킬 때, $f(c)=2c$인 c의 개수가 닫힌구간 $[0,1]$에서 하나 이하로 존재함을 귀류법을 이용하여 증명하시오.

계 열 문 항 2

<라>

두 직선 $l: y=mx+n$, $l': y=m'x+n'$ 에 대하여 l과 l'이 서로 수직인 조건은 다음과 같다.

$$mm' = -1$$

거꾸로 $mm' = -1$이면 l과 l'은 서로 수직이다.

<마>

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 이차함수 $y=nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 점 $(0, 1)$을 지난다고 가정하자. (단, $a_n > 0$이다.)

2-1. a_n과 b_n을 각각 구하시오.

2-2. 이차함수 $y=nx^2$과 x축 및 이차함수 $y=nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$에서의 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라고 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

계 열 문 항 3

<바>

함수 $f: X \to Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$인 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다. 이때 Y의 각 원소 y에 $y = f(x)$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f의 역함수라 하고, 기호로

$$f^{-1}: Y \to X,\ x = f^{-1}(y)$$

와 같이 나타낸다.

<사>

실수 전체의 집합에서 정의된 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$가 역함수를 갖기 위한 조건은 다음과 같다.

1. $a > 0$이면 도함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \geq 0$을 만족시킨다.
2. $a < 0$이면 도함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \leq 0$을 만족시킨다.

제시문 <바>와 <사>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x) = x^3 + 2x + 4$는 실수 전체의 집합에서 정의된 삼차함수이다.

3-1. 삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재함을 보이고, 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(t^2 + 5t + 1) = t - 1$을 만족시키는 실수 t의 값을 모두 구하시오.

3-2. 삼차함수 $f(x)$의 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(t^2 + 2) + f^{-1}(t^2 - 2) = 0$을 만족시키는 실수 t의 값을 모두 구하시오.