2025학년도
숙명여자대학교
대학별고사
문항카드

- 논술(자연_일반) -

2-5. 문항카드 ⑤ <자연계열(약학부 제외) 1, 2, 3번 문항>

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학부 제외) / 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	최대, 최소, 극한, 적분, 함수의 연속, 사잇값 정리
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 자료

<가>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

<나>

다항식의 곱셈 공식을 이용하면 여러 가지 식의 값을 쉽게 구할 수 있다.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

<다>

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면, 최대·최소 정리에 따라 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차방정식 $x^2+(\ln k)x-(\ln k+2)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 할 때, 두 실근 α, β의 차가 최소가 되는 실수 k의 값을 구하시오.

1-2. 삼차함수 $f(x)=(x^2-1)(x+3k)$의 극댓값과 극솟값의 합이 최대가 되는 실수 k의 값과 그때 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오. (단, $-1\le k\le 1$)

<라>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

<마>

함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

<바>

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

제시문 <라>, <마>, <바>를 읽고, 다음 조건을 만족시키는 a_n에 대하여 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 $a_1=1$이고 $a_n<a_{n+1}$이다. 함수 $f(x)=\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n이 $A_n=e^{2n-1}$이다.

2-1. 함수 $f(x)$의 a_1부터 a_n까지의 정적분을 이용하여 a_n을 구하시오.

2-2. x축, y축에 모두 접하고 중심이 점 (a_n, a_n)인 원이 직선 $y=\left(\tan\frac{1}{n}\right)x$와 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty} l_n^2$의 값을 구하시오.

<사>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 이것을 사잇값의 정리라고 한다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

<아>

명제 $p \rightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

제시문 <사>, <아>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 방정식 $x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^2+x-1=0$이 열린구간 $(-2,1)$에서 적어도 두 개의 실근을 가짐을 보이시오. (단, n은 자연수)

3-2. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)>0$, $f(b)>0$이다. 다음 명제의 대우를 말하고 그것이 참임을 증명하시오.

> 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 (a,b)에서 실근을 갖지 않는다면 열린구간 (a,b)의 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

3. 출제 의도

명제, 함수, 방정식, 미분과 적분 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문제들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문제들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 최대 최소, 이차방정식, 연속함수의 성질, 정적분, 삼각함수, 수열, 수열의 극한, 방정식의 근 등에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 <가>, <나>, <다>	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-1	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-11]이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-2	[10수학01-01]다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 <라>, <마>, <바>	[10수학02-05]점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03]정적분의 뜻을 안다. [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 2-1	[12수학Ⅰ03-01]수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-03]등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03]정적분의 뜻을 안다. [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 2-2	[10수학02-05]점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12수학Ⅰ02-02]삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-04]삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
제시문 <사>, <아>	[10수학03-05]명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 3-1	[12수학Ⅰ03-03]등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 3-2	[10수학03-05]명제의 역과 대우를 이해한다. [10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	고성은	좋은책신사고	2020	11-16, 51-54, 126-128, 190-194
	고등학교 수학I	김원경	비상교육	2020	71-88, 127-133,
	고등학교 수학II	이준열	천재교육	2020	35-40, 83-90, 121-127
	고등학교 미적분	황선욱	미래엔	2020	71-74, 166-167

5. 문항 해설

제시문 <가>, <나>, <다>에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계와 닫힌구간에서 연속인 함수의 최댓값, 최솟값에 대해서 소개한다. <문제 1-1>에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.<문제 1-2>에서는 극댓값과 극솟값의 합의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <라>, <마>, <바>에서는 정적분의 성질과 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법과 점과 직선 사이의 거리를 소개한다. <문제 2-1>에서는 정적분의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 삼각함수의 극한을 이용하여 주어진 값의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <사>, <아>에서는 사잇값의 정리와 대우를 이용한 명제의 증명에 대해서 소개한다. <문제 3-1>에서는 사잇값의 정리를 활용하여 주어진 구간에서 방정식이 실근을 가짐을 보일 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 주어진 명제의 대우를 말하고 그 명제가 참임을 증명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	① <1-1>, <1-2>에서 근과 계수의 관계를 정확히 이해한다. ② <1-1>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 두 실근의 차의 최솟값을 구할 수 있다. ④ <1-2>에서 도함수의 근과 계수와의 관계를 활용할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 최댓값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	
2-1 2-2	① <2-1>에서 정적분을 계산할 수 있다. ② <2-1>에서 등비수열의 합을 구할 수 있다. ③ <2-1>에서 정적분의 성질을 이용하여 a_n을 구할 수 있다. ④ <2-2>에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. ⑤ <2-2>에서 선분의 길이 l_n을 구할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

3-1 3-2	① <3-1>에서 사잇값의 정리를 정확히 이해한다. ② <3-1>에서 등비수열의 합을 구할 수 있다. ③ <3-1>에서 사잇값의 정리를 활용하여 두 개의 실근을 가짐을 증명할 수 있다. ④ <3-2>에서 명제의 대우를 바르게 말할 수 있다. ⑤ <3-2>에서 명제의 가정을 두 가지 경우로 나누어 설명할 수 있다. ⑥ <3-2>에서 사잇값의 정리를 활용하여 명제가 참임을 증명할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

7. 예시 답안

■ 1-1

주어진 이차방정식의 판별식은

$$D=(\ln k)^2+4(\ln k+2)=(\ln k+2)^2+4>0$$

이므로 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=-\ln k,\ \alpha\beta=-(\ln k+2)$$

이다. 따라서 두 근 α,β의 차의 제곱은

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\ln k)^2+4\ln k+8=(\ln k+2)^2+4$$

이고, $\ln k=-2$, 즉 $k=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$일 때, 최소이다.

따라서 두 근의 차가 최소가 되는 실수 k의 값은 $k=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$이다.

■ 1-2

도함수 $f'(x)=2x(x+3k)+x^2-1=3x^2+6kx-1$이다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식

$$D/4=9k^2+3>0$$

이므로 $f'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

$f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $f'(x)=0$의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4k^2+\frac{2}{3},$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-8k^3-2k$$

삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1로 양수이고 $\alpha<\beta$이므로 $f(\alpha)$는 극댓값, $f(\beta)$ 극솟값이다.

따라서

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta) &= \alpha^3+\beta^3+3k(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)-6k \\ &=-8k^3-2k+12k^3+2k+2k-6k \\ &= 4k^3-4k \end{aligned}$$

여기서 $g(k)=4k^3-4k$라고 하면, $g'(k)=4(3k^2-1)$이므로 $g'(k)=0$에서 $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

k	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(k)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(k)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

따라서 $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $f(\alpha)+f(\beta)$를 최대로 하고 최댓값은 $g\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ 이다.

■ 2-1

함수 $f(x)$의 a_1부터 a_n까지의 정적분은

$$\int_{a_1}^{a_n}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx=\int_{a_1}^{a_2}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx+\int_{a_2}^{a_3}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx+\cdots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{2x}{e^2-1}e^{x^2}dx=e+e^3+\cdots+e^{2n-3}$$

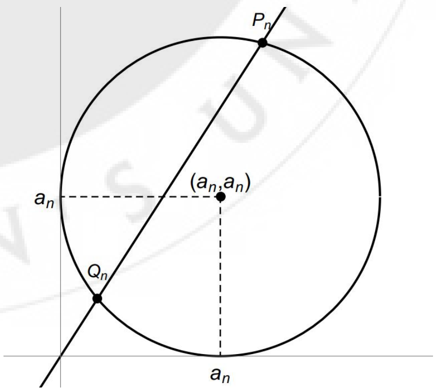
$$\frac{1}{e^2-1}\left(e^{a_n^2}-e\right)=\sum_{k=1}^{n-1}e^{2k-1}=\frac{1}{e^2-1}\left(e^{2n-1}-e\right)$$

따라서 $a_n^2=2n-1$, 즉 $a_n=\sqrt{2n-1}$이다.

■ 2-2

점 (a_n, a_n)과 직선 $\left(\tan\dfrac{1}{n}\right)x-y=0$ 사이의 거리를 d_n으로 놓으면

$$d_n=\frac{\left|\left(\tan\dfrac{1}{n}\right)a_n-a_n\right|}{\sqrt{\tan^2\dfrac{1}{n}+1}}$$



이다. 한편 $l_n=2\sqrt{a_n^2-d_n^2}$ 이므로,

$$\begin{aligned} l_n^2 &= 4\left(a_n^2-d_n^2\right) \\ &= 4\left(a_n^2-\frac{a_n^2\left(\tan\dfrac{1}{n}-1\right)^2}{1+\tan^2\dfrac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

이다. 이때 삼각함수의 성질에 의하여 $1+\tan^2\dfrac{1}{n}=\sec^2\dfrac{1}{n}$이므로

$$4\left(a_n^2-\frac{a_n^2\left(\tan\dfrac{1}{n}-1\right)^2}{1+\tan^2\dfrac{1}{n}}\right)=4a_n^2\left(1-\frac{\left(\tan\dfrac{1}{n}-1\right)^2}{\sec^2\dfrac{1}{n}}\right)=8a_n^2\left(\frac{\tan\dfrac{1}{n}}{\sec^2\dfrac{1}{n}}\right)=8a_n^2\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)$$ 이다.

또한 $a_n = \sqrt{2n-1}$ 이므로

$$l_n^2 = 8(2n-1)\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)$$ 이다.

이때, $t = \frac{1}{n}$이라 하면, $n\to\infty$ 일 때, $t\to 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} l_n^2 = \lim_{n\to\infty} 8(2n-1)\left(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0} 8\left(\frac{2}{t}-1\right)(\sin t\cos t)$$
$$= \lim_{t\to 0} 8(2-t)\frac{\sin t}{t}\cos t = 16$$

이다.

■ 3-1

$f(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$라 하자. $f(0) = -1 < 0$이다. 한편,

$$f(-2) = (-2)^{2n} + (-2)^{2n-1} + \cdots + (-2)^2 + (-2) - 1 = \frac{(-2)^{2n+1} - (-2)}{-2-1} - 1 = \frac{2}{3}\times 4^n - \frac{5}{3}$$

이고, n은 자연수이므로 $f(-2) \geq \frac{2}{3}\times 4 - \frac{5}{3} = 1 > 0$이다. 또한 $f(1) = 2n-1 > 0$이다.

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 -2와 0사이에 적어도 하나의 실근을 갖고, 0과 1사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그러므로 열린구간 $(-2, 1)$에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

■ 3-2

주어진 명제의 대우는

'열린구간 (a, b)의 어떤 x에 대하여 $f(x) \leq 0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 실근을 갖는다.'

이다.

조건에 의하여 $f(c) \leq 0$인 실수 c가 a와 b 사이에 존재한다.

만약 $f(c) = 0$이면 $x = c$는 방정식 $f(x) = 0$의 근이다.

만약 $f(c) < 0$이면 $f(a) > 0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 a와 c 사이에 적어도 하나의 실근을 갖고 또한 $f(b) > 0$이므로 c와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 실근을 갖는다.