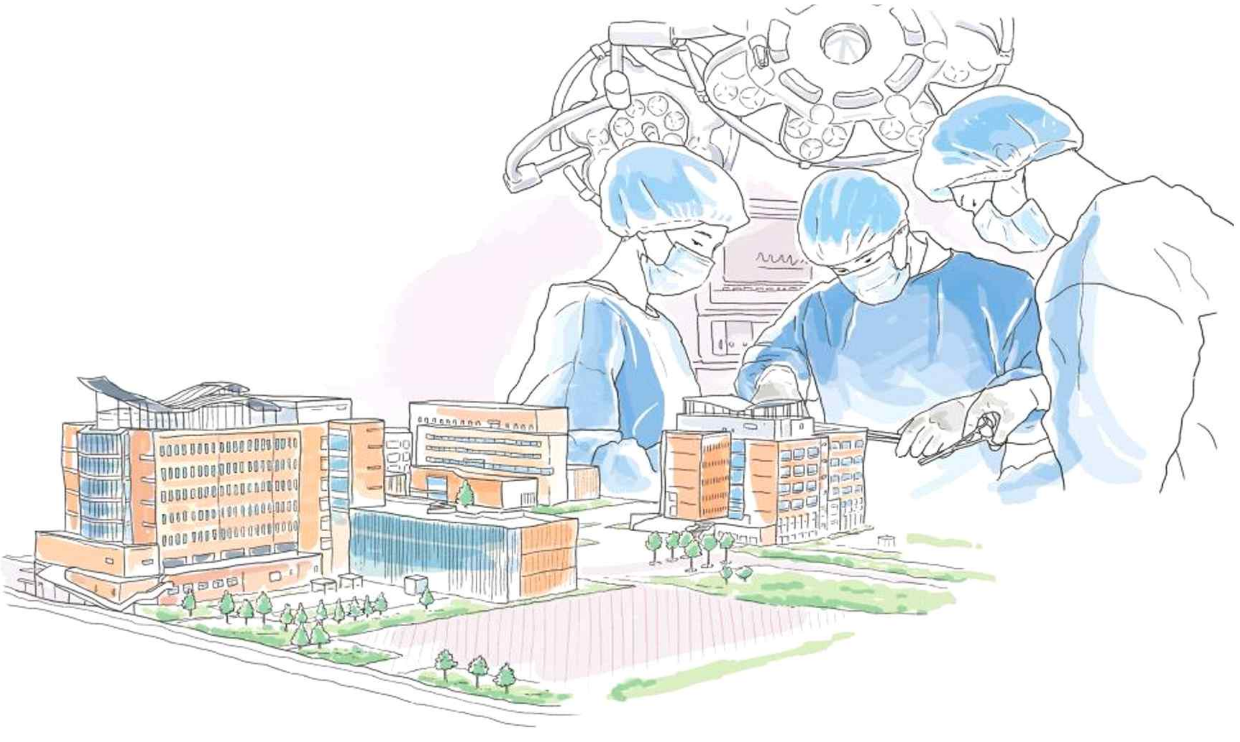
2026학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 의·약학계 -



문항카드 7	의·약학계 1번

1. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 문제의 조건이 이 함수가 극값을 가질 때임을 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 주어진 조건이 극값을 가질 때임을 파악하고, 특정한 조건에서 극값을 찾을 수 있는지와 삼차함수와 직선의 교점을 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 조건을 만족할 때 방정식의 두 근의 제곱의 합을 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 그 범위를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2. 문항 해설

본 문항은 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 문제의 조건이 이 함수가 극값을 가질 때임을 파악할 수 있는지를 평가한다. 또한 특정한 조건을 만족시키는 k의 값의 범위와 이때 구하고자 하는 값을 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	함수 $g(t)$의 식을 구할 수 있다.	4
	p_1의 값을 구할 수 있다.	6
	k의 값의 합을 구할 수 있다.	5
[1-2]	$n(A_k)=2$를 만족시키는 k의 조건을 구할 수 있다.	5
	$m_k < k < M_k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	5
	${m_k}^2+{M_k}^2$을 k에 대한 식으로 표현할 수 있다.	7
	${m_k}^2+{M_k}^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	3

4. 예시 답안

[1-1]

함수 $f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$t=-\dfrac{p}{2}$일 때, $x=-\dfrac{p}{2}$이고 이때, $g(t)$는 $g(t)=-\dfrac{p}{2}$이다.

$t\neq-\dfrac{p}{2}$일 때, $y=-\dfrac{1}{2t+p}(x-t)+t^2+pt+\dfrac{1}{2}p-\dfrac{1}{2}$이고 이때 $g(t)$는

$g(t)=t+(2t+p)\left(t^2+pt+\dfrac{1}{2}p-\dfrac{1}{2}\right)=2t^3+3pt^2+\left(p^2+p\right)t+\dfrac{1}{2}p^2-\dfrac{1}{2}p$이다.

그러므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=2t^3+3pt^2+\left(p^2+p\right)t+\dfrac{1}{2}p^2-\dfrac{1}{2}p$이다.

$n(A_k)=2$를 만족시키는 k가 존재하기 위해서는 $g(t)$가 극값을 가져야 하고, $g(k)$가 극값이 될 때 $n(A_k)=2$가 된다.

$g'(t)=6t^2+6pt+p^2+p$이고, $g(t)$가 극값을 가질 조건은 $g'(t)=0$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

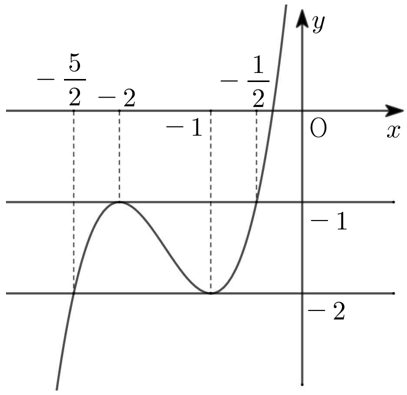
$\dfrac{D}{4}=9p^2-6\left(p^2+p\right)>0$

$3p(p-2)>0$

$p<0$ 또는 $p>2$

p는 자연수이므로 $p>2$이고, 최소의 자연수 p_1은 3이다.

$p=3$일 때 $g(t)$는 $g(t)=2t^3+9t^2+12t+3$이고, $g'(t)=6t^2+18t+12=6(t+1)(t+2)$이므로
극값은 $t=-1$일 때 $g(-1)=-2$, $t=-2$일 때, $g(-2)=-1$이다.



$g(t)=-2$에서 $2t^3+9t^2+12t+3=-2$

$2t^3+9t^2+12t+5=0$

$(t+1)^2(2t+5)=0$

그러므로 $g(t)=-2$를 만족시키는 t의 값은 $t=-1$ 또는 $t=-\dfrac{5}{2}$이다.

$g(t)=-1$에서 $2t^3+9t^2+12t+3=-1$

$2t^3+9t^2+12t+4=0$

$(t+2)^2(2t+1)=0$

그러므로 $g(t)=-1$을 만족시키는 t의 값은 $t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 모든 k의 값은 $-\dfrac{5}{2},\ -2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}$이고, 모든 k의 값의 합은 -6이다.

[1-2]

함수 $f(x)=x^2+x-7$ 에 대하여 $g(t)$ 는
$g(t)=2t^3+3t^2-12t-7$ 이다.

(i) $n(A_k)=2$ 를 만족시키는 k 의 조건

$g'(t)=6t^2+6t-12$ 이므로
극값은 $t=1$ 일 때 $g(1)=-14$, $t=-2$ 일 때 $g(-2)=13$ 이다.

(i -1) $g(k)=-14$ 인 경우

$g(t)=-14$ 에서 $2t^3+3t^2-12t-7=-14$

$2t^3+3t^2-12t+7=0$

$(t-1)^2(2t+7)=0$

그러므로 $g(t)=-14$ 를 만족시키는 t 의 값은 $t=1$ 또는 $t=-\dfrac{7}{2}$ 이다.

(i -2) $g(k)=13$ 인 경우

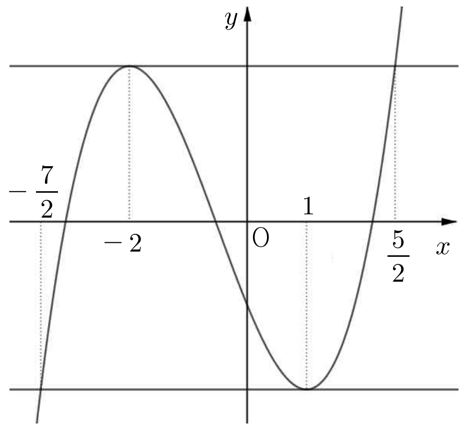
$g(t)=13$ 에서 $2t^3+3t^2-12t-7=13$

$2t^3+3t^2-12t-20=0$

$(t+2)^2(2t-5)=0$

그러므로 $g(t)=13$ 을 만족시키는 t 의 값은 $t=-2$ 또는 $t=\dfrac{5}{2}$ 이다.

(i -1)과 (i -2)에 의하여 $n(A_k)=2$ 를 만족시키는 모든 k 의 값은 $-\dfrac{7}{2},\ -2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}$ 이다.



(ii) $m_k < k < M_k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위

$g(t)=g(k)$ 에서 $2t^3+3t^2-12t-7=2k^3+3k^2-12k-7$

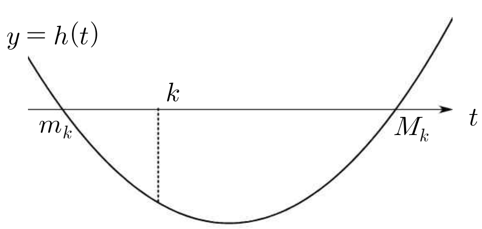
$2(t^3-k^3)+3(t^2-k^2)-12(t-k)=0$

$(t-k)(2t^2+2kt+2k^2+3t+3k-12)=0$

$(t-k)\{2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12\}=0$

$h(t)=2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12$ 라 두면

그림과 같이 $h(k)<0$ 이 되어야 한다.



$h(k)=2k^2+2k^2+3k+2k^2+3k-12=6k^2+6k-12=6(k+2)(k-1)<0$
그러므로 $m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $-2<k<1$ 이다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 k 의 값의 범위는 $k=-\frac{7}{2},\ k=\frac{5}{2},\ -2\le k\le 1$ 이다.

먼저 $k=-\frac{7}{2}$ 또는 $k=\frac{5}{2}$ 일 경우는 $g(-\frac{7}{2})=g(1),\ g(\frac{5}{2})=g(-2)$에 의하여 $A_{-\frac{7}{2}}=A_1,\ \ A_{\frac{5}{2}}=A_{-2}$가 성립하므로 $-2\le k\le 1$ 에서 ${M_k}^2+{m_k}^2$ 의 최댓값 및 최솟값을 구하면 충분하다.
또한 $-2\le k\le 1$ 일 경우 M_k 과 m_k 은 $h(t)=2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12=0$ 의 서로 다른 두 근이 된다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $M_k+m_k=-\frac{2k+3}{2},\ M_km_k=\frac{2k^2+3k-12}{2}$ 이므로,

${M_k}^2+{m_k}^2=\frac{(2k+3)^2}{4}-2\times\frac{2k^2+3k-12}{2}=\frac{1}{4}\left(-4k^2+57\right)$ 이다.

따라서 $-2\le k\le 1$ 에서 ${M_k}^2+{m_k}^2$ 의 최댓값은 $k=0$ 일 때 $\frac{57}{4}$, 최솟값은 $k=-2$일 때 $\frac{41}{4}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{49}{2}$ 이다.

[다른 풀이]

[1-2] (ⅰ)의 다른 풀이

(ⅰ) $n(A_k)=2$ 를 만족시키는 경우
$g(t)=g(k)$ 에서 $2t^3+3t^2-12t-7=2k^3+3k^2-12k-7$
$2\left(t^3-k^3\right)+3\left(t^2-k^2\right)-12(t-k)=0$
$(t-k)\left\{2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12\right\}=0$
$h(t)=2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12$ 라 두자.
$n(A_k)=2$ 를 만족시키기 위해서는 $h(t)=0$ 이 중근을 가지거나 k 를 근으로 가져야 한다.

(ⅰ-1) $h(t)=0$ 이 중근을 가지는 경우

$\frac{D}{4}=(2k+3)^2-8\left(2k^2+3k-12\right)=-12k^2-12k+105=-3(2k+7)(2k-5)=0$

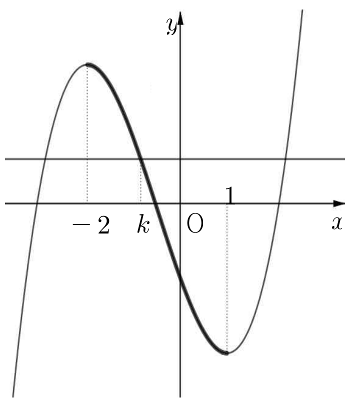
그러므로 k 의 값은 $k=-\frac{7}{2}$ 또는 $k=\frac{5}{2}$ 이다.

(ⅰ-2) $h(t)=0$ 이 k 를 근으로 가지는 경우
$h(k)=2k^2+(2k+3)k+2k^2+3k-12=6(k+2)(k-1)=0$
그러므로 k 의 값은 $k=-2$ 또는 $k=1$ 이다.

(ⅰ-1)과 (ⅰ-2)에 의하여 $n(A_k)=2$ 를 만족시키는 모든 k 의 값은 $-\frac{7}{2},\ -2,\ 1,\ \frac{5}{2}$ 이다.

[1-2] (ⅱ)의 다른 풀이

(ⅱ) $m_k<k<M_k$ 을 만족시키는 경우
$m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 k 가 존재하기 위해서는 $g(t)$ 가 극값을 가지는 두 개의 t 의 값 사이에 k 가 존재하면 된다.
$g'(t)=6t^2+6t-12$ 이므로
극값은 $t=1$ 일 때와 $t=-2$ 일 때 존재하게 된다.
그러므로 $m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는 $-2<k<1$ 이다.



문항카드 8	의·약학계 2번

1. 출제 의도

본 문항에서는 합성함수의 미분가능성을 조사하여 조건을 만족시키는 함수의 형태를 찾고, 주어진 함숫값이 최댓값을 가질 때, 함수의 그래프와 x축에 평행한 직선이 만나는 점의 개수를 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 함수 $f(|g(x)|)$가 미분가능하도록 하는 실수 b의 값을 찾고, $|g(f(-2))|$의 값이 실수 a의 값의 범위에 따라 변화함을 확인하여 $|g(f(-2))|$의 최댓값 p를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] [2-1]에서 구한 p의 값을 통해 함수 $y=|g(f(x))|$의 그래프의 개형을 파악하고, 직선 $y=t$와 만나는 점의 개수를 파악하여 극한값과 함숫값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2. 문항 해설

본 문항은 합성함수가 미분 가능하거나 한 점에서만 미분 가능하지 않은 상황에서 요구하는 함수의 조건을 구하고, 함숫값이 최대가 되는 경우를 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가한다. 또한, 함숫값이 최대가 되는 경우의 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 점근선의 방정식 등의 요소를 찾아 함수의 그래프의 개형을 찾아보고, 두 함수가 만나는 교점의 개수를 함수로 표현한 후 극한값과 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	b의 값을 구할 수 있다.	5
	$f(\alpha)=-1$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	5
	$f(\alpha)=2$일 때, a의 값의 범위를 구할 수 있다.	5
	최댓값 p를 구할 수 있다.	5
[2-2]	$g'(f(x))f'(x)=0$인 x의 값을 설명할 수 있다.	5
	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 설명할 수 있다.	3
	직선 $y=g(0)$이 점근선임을 설명할 수 있다.	2
	함수 $y=\|g(f(x))\|$의 그래프의 개형을 통해 함수 $y=h(t)$를 구할 수 있다.	3
	$\lim\limits_{t\to p+}h(t)+\lim\limits_{t\to p-}h(t)+h(g(0))$의 값을 구할 수 있다.	2

4. 예시 답안

[2-1]

x 에 대한 방정식 $(e^x - e^2)\left(e^x - \frac{1}{e}\right) = 0$ 의 해가 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이고

$g'(x) = 2e^{2x} - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)e^x$ 에 대해 $g'(-1) \neq 0$, $g'(2) \neq 0$ 이므로 함수 $|g(x)|$ 는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 미분가능하지 않지만 조건 (가)에서 함수 $f(|g(x)|)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(|g(x)|)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $g(-1) = g(2) = 0$ 이므로 $x = 2$ 일 때, $\lim_{x \to 2} \frac{f(|g(x)|) - f(|g(2)|)}{x - 2}$ 는

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2-} \frac{f(|g(x)|) - f(|g(2)|)}{x-2} &= \lim_{x \to 2-} \frac{f(-g(x)) - f(0)}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2-} \left(\frac{f(-g(x)) - f(0)}{-g(x) + g(2)} \times \frac{-g(x) + g(2)}{x-2} \right) \\
&= f'(0) \times (-g'(2)) \\
\lim_{x \to 2+} \frac{f(|g(x)|) - f(|g(2)|)}{x-2} &= \lim_{x \to 2+} \frac{f(g(x)) - f(0)}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2+} \left(\frac{f(g(x)) - f(0)}{g(x) - g(2)} \times \frac{g(x) - g(2)}{x-2} \right) \\
&= f'(0) \times g'(2)
\end{aligned}$$

좌극한과 우극한이 같으므로 $f'(0) = 0$ 이다.
또한, $x = -1$ 일 때도 같은 방법으로 $f'(0) = 0$ 이다.
그러므로 $f'(x) = \{ax^2 + (2a+b)x + b\}e^x$ 에서 $f'(0) = b = 0$
따라서 $f(x) = ax^2e^x$ 이다.

한편, 함수 $|g(x)|$ 가 $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 미분가능하지 않고, 함수 $|g(f(x))|$ 가 $x = \alpha$ 에서 미분가능하지 않으므로 $f(\alpha) = -1$ 또는 $f(\alpha) = 2$ 이다.

(i) $f(\alpha) = -1$ 일 때, $\alpha^2 e^\alpha > 0$ 이므로 $a < 0$ 이다.
$f'(x) = a(x^2 + 2x)e^x$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 이다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$4ae^{-2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$

실수 전체의 집합에서 $f(x) \leq 0$ 이고 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ 이므로 $f(\alpha) = -1$ 인 양수 α 가 반드시 존재하고, 그래프 개형에서 $f(\alpha) = 2$ 인 경우는 나타나지 않는다.

그러므로 극솟값의 범위가 $-1 \leq 4ae^{-2} < 0$ 이므로 $-\frac{e^2}{4} \leq a < 0$ 이다.

(ii) $f(\alpha) = 2$ 일 때, $\alpha^2 e^\alpha > 0$ 이므로 $a > 0$ 이다.
$f'(x) = a(x^2 + 2x)e^x$ 에서 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 이다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4ae^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

실수 전체의 집합에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $f(\alpha) = 2$ 인 양수 α 가 반드시 존재하고, 그래프 개형에서 $f(\alpha) = -1$ 인 경우는 나타나지 않는다.

그러므로 극댓값의 범위가 $0 < 4ae^{-2} \leq 2$ 이므로 $0 < a \leq \frac{e^2}{2}$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)의 a 의 값의 범위는 $-\frac{e^2}{4} \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq \frac{e^2}{2}$ 이다.

한편, $|g(f(-2))|$ 는

$$|g(f(-2))| = \left|\left(e^{4ae^{-2}} - e^2\right)\left(e^{4ae^{-2}} - \frac{1}{e}\right)\right| \quad \left(-\frac{e^2}{4} \leq a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq \frac{e^2}{2}\right)$$

이므로 $s = f(-2) = 4ae^{-2}$ 라 하면

함수 $g(s) = (e^s - e^2)\left(e^s - \frac{1}{e}\right)$ $(-1 \leq s < 0$ 또는 $0 < s \leq 2)$ 에서

$$g'(s) = 2e^{2s} - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)e^s = 0, \ e^s = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}$$

이다.

s	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\ln\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}\right)$	$\cdots$	2
$g'(s)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(s)$	0	$\searrow$	$\left(e + 1 - \frac{1}{e} - e^2\right)$	$\searrow$	$-\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e}\right)^2$	$\nearrow$	0

따라서 $|g(f(-2))|$ 는 $s = \ln\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}\right)$ $(= 4ae^{-2})$ 에서 최댓값 $p = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e}\right)^2$ 을 갖는다.

[2-2]

$|g(f(-2))| = p$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = ax^2e^x, \ a = \frac{1}{4}e^2\ln\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}\right)$$

이다.

[2-1]에서 $g'(x) = 0$ 인 x 에 대해 $e^x = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}$ 이고

$g'(f(x))f'(x) = 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 또는 $e^{f(x)} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}$ 이므로 구하는 실근은

$x = -2$ 또는 $x = 0$

또는 $f(x) = \ln\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e}\right) = 4ae^{-2}$ …… ①

이다.

구간 $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고, 구간 $[-2, 0]$ 에서 감소하므로 ①을 만족시키는 x 의 값을 $\beta(\beta > 0)$ 라 하면 $f(\beta) = f(-2) = 4ae^{-2}$ 이다.

$g(f(-2)) = g(f(\beta)) = -p$ 이므로 함수 $g(f(x))$ 의 증감표는 다음과 같다.

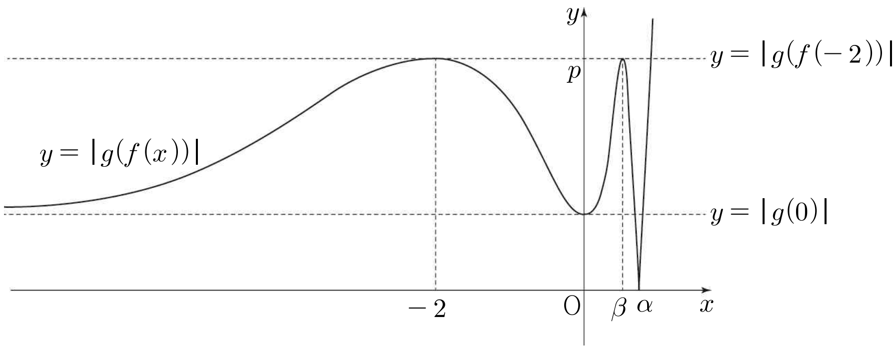
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(f(x))f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(f(x))$	$\searrow$	$-p$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$-p$	$\nearrow$

$x \to -\infty$ 일 때, $f(x) \to 0+$ 이고, 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 는 연속이므로

$$\lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim_{i \to 0+} g(i) = g(0) = (1-e^2)\left(1-\frac{1}{e}\right) < 0$$

따라서 직선 $y=g(0)$ 이 $y=g(f(x))$ 의 점근선이다.

위의 증감표에 따라 함수 $|g(f(x))|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 구하는 함수 $h(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t>p) \\ 2 & (0<t<|g(0)|) \\ 3 & (t=|g(0)| \text{ 또는 } t=p) \\ 5 & (|g(0)|<t<p) \end{cases}$ 이다.

따라서 $\lim_{t \to p+} h(t) + \lim_{t \to p-} h(t) + h(g(0)) = 1+5+0=6$ 이다.

문항카드 9	의·약학계 3번

1. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 만족시키는 공간도형에 대하여 두 평면이 이루는 각과 정사영이 특정 조건을 만족시키기 위한 점의 위치를 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[3-1] 두 평면이 이루는 각을 구하기 위하여 주어진 도형을 확장하거나 평행이동하여 이면각의 크기를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 정사영이 특정 조건을 만족시키기 위한 점의 위치를 파악하고, 이를 구하기 위하여 닮음비와 코사인법칙 등을 활용할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2. 문항 해설

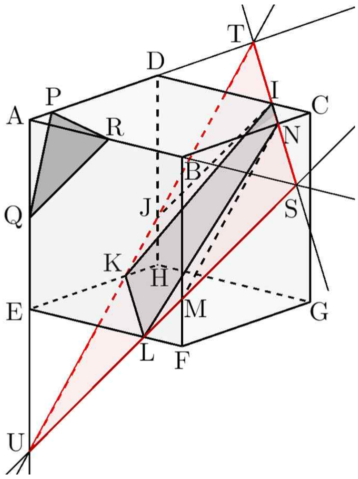
본 문항은 정육면체에서 특정 위치에 있는 두 도형에 대하여 각 도형이 포함된 평면이 이루는 이면각과 그에 대한 코사인 값을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 주어진 조건을 만족시키는 정사영이 나타나기 위한 조건을 파악하여 넓이가 최대가 되는 점의 위치를 파악할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	이면각 θ를 찾기 위해 평면 IJKLMN과 평행한 평면을 찾을 수 있다.	6
	코사인법칙 등을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	4
[3-2]	정삼각뿔 $\mathrm{A-STU}$에서 점 A의 수선의 발이 정삼각형 STU의 무게중심에 위치하는 것을 이용하여, 정사영의 넓이가 최대인 경우가 점 Q의 수선의 발인 점 $\mathrm{Q'}$이 선분 KL에 위치(ⅰ) 하거나, 점 R의 수선의 발인 점 $\mathrm{R'}$이 선분 LN에 위치(ⅱ)할 때임을 보일 수 있다.	4
	(ⅰ)에서 점 Q(또는 점 R)과 선분 $\mathrm{AA'}$사이의 거리를 구할 수 있다.	3
	(ⅰ)에서 점 Q(또는 점 R)과 선분 $\mathrm{AA'}$사이의 거리와 닮음을 이용하여 선분 AQ의 길이를 구하고, 이로부터 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	3
	(ⅱ)에서 선분 LN의 길이를 구할 수 있다.	2
	(ⅱ)에서 코사인법칙을 이용하여 선분 $\mathrm{SR'}$의 길이를 구하고, 이로부터 닮음을 이용하여 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	6
	(ⅰ), (ⅱ)를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	2

4. 예시 답안

[3-1]

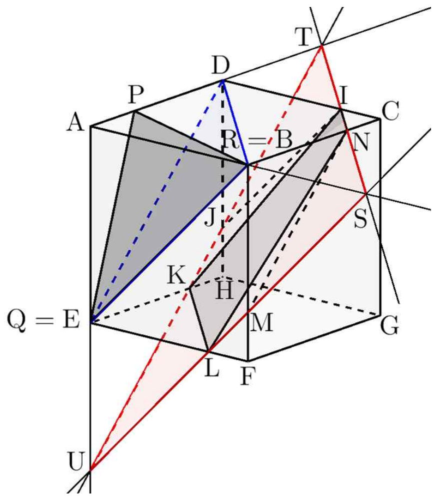


직선 NI와 두 직선 AB, AD와의 교점을 각각 S, T라 하자.

또한 두 직선 SL과 TK가 만나는 점을 U라 하면 $\overline{\mathrm{AS}}=\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{AU}}=7$이다.

이때 사각뿔 $\mathrm{A}-\mathrm{STU}$의 밑면은 한 변의 길이가 $7\sqrt{2}$인 정삼각형이고, 옆면은 직각이등변삼각형이다.

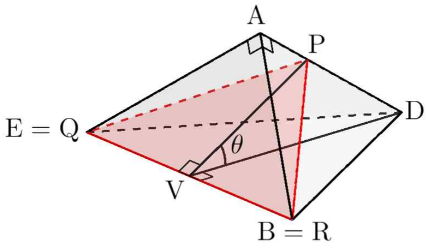
사각형 KLNI은 삼각형 STU에 포함되므로 두 평면 PQR과 KLNI가 이루는 각은 두 평면 PQR과 STU가 이루는 각과 같다. 또한 두 평면 STU와 BDE는 서로 평행하고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{AR}}=1:3:3$인 조건만 만족하면 되므로 두 점 R, Q가 각각 B, E일 때, 두 평면 PQR과 DEB가 이루는 각을 구하면 된다.



선분 QR의 중점을 V라 하면 삼각형 PQR과 삼각형 DEB가 모두 이등변삼각형이므로 이면각의 정의에 의하여 두 선분 PV와 DV가 이루는 각의 크기가 θ이다.

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PD}}=\dfrac{8}{3}$이고, 삼각형 BDE는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DV}}=2\sqrt{6}$이다.

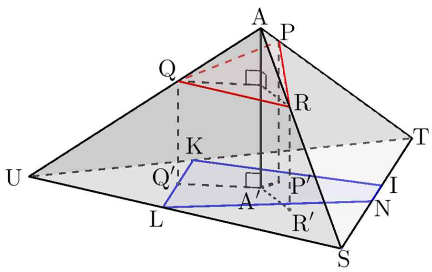
또한 삼각형 PAV은 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{AV}}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PV}}=\dfrac{2\sqrt{22}}{3}$이다.

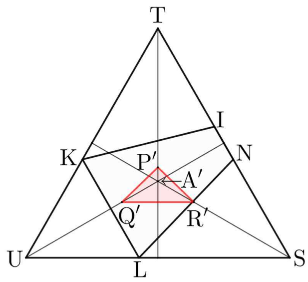


따라서 삼각형 PVD 에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \dfrac{24+\dfrac{88}{9}-\dfrac{64}{9}}{2\times2\sqrt{6}\times\dfrac{2\sqrt{22}}{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{33}} = \dfrac{5\sqrt{33}}{33}$이다.

[3-2]

점 A에서 삼각형 STU에 내린 수선의 발을 A′이라 하면, 점 A′은 삼각형 STU의 무게중심이다. 이때 삼각형 PQR의 평면 STU 위로의 정사영을 삼각형 P′Q′R′이라 하면, Q′과 R′은 각각 선분 A′U와 A′S 위에 위치하며 A′ 사이의 거리가 서로 같다. 또한 P′은 선분 A′T 위에 위치하며, $\mathrm{A'P'}:\mathrm{A'R'}=1:3$이므로, 조건을 만족하는 삼각형 PQR의 정사영의 넓이가 최대일 때는 선분 Q′R′의 점 Q′이 선분 KL 위의 점일 때 또는 점 R′이 선분 LN 위의 점일 때이다.





(i) 점 Q′이 선분 KL 위에 있을 때

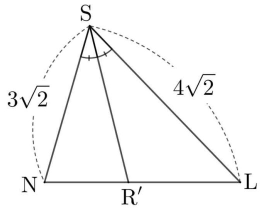
직선 KL과 직선 UA′이 수직으로 만나므로 점 Q와 선분 AA′ 사이의 거리는 점 A′과 직선 KL 사이의 거리와 같다. $\overline{\mathrm{UA'}}=7\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7\sqrt{6}}{3}$이고, 점 U와 직선 KL 사이의 거리는 삼각형 ULK가 정삼각형이므로 $3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$이다. 그러므로 점 A′와 직선 KL 사이의 거리는 $\dfrac{7\sqrt{6}}{3}-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$이다. ……①

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=k$라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}}=3k$이고 점 Q에서 선분 AA′에 내린 수선의 발을 Q″라 하면, 삼각형 AQQ″은 삼각형 AUA′과 닮음이다. 이때 $\overline{\mathrm{AU}}:\overline{\mathrm{UA'}}=7:\dfrac{7\sqrt{6}}{3}=3:\sqrt{6}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QQ''}}=3k:\sqrt{6}k$이다. 즉, $\overline{\mathrm{QQ''}}=\sqrt{6}k$이다. ……②

①, ②에 의하여 $\overline{\mathrm{QQ''}}=\sqrt{6}k=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$이므로 $k=\dfrac{5}{6}$이다.

(ii) 점 R′이 선분 LN 위에 있을 때

점 R′이 선분 LN 위에 있을 때, 선분 SA′과 선분 LN의 교점이 된다.



선분 $\mathrm{SR'}$은 각 NSL의 이등분선이므로 $\overline{\mathrm{NR'}}:\overline{\mathrm{R'L}}=3:4$ 이다.

또한 $\overline{\mathrm{LF}}=1,\ \overline{\mathrm{FB}}=4,\ \overline{\mathrm{BN}}=3$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{NL}}=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}$이다.

그러므로 두 삼각형 $\mathrm{NSR'}$과 $\mathrm{LSR'}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\frac{18+\overline{\mathrm{SR'}}^2-\left(\frac{3\sqrt{26}}{7}\right)^2}{2\times3\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{SR'}}}=\frac{32+\overline{\mathrm{SR'}}^2-\left(\frac{4\sqrt{26}}{7}\right)^2}{2\times4\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{SR'}}}$$

$$72+4\overline{\mathrm{SR'}}^2-4\times\frac{9}{49}\times26=96+3\overline{\mathrm{SR'}}^2-3\times\frac{16}{49}\times26$$

$$\overline{\mathrm{SR'}}=\frac{12\sqrt{6}}{7}$$

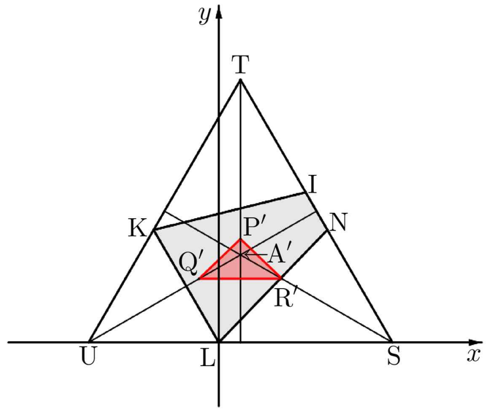
그러므로 $\overline{\mathrm{A'R'}}=\frac{7\sqrt{6}}{3}-\frac{12\sqrt{6}}{7}=\frac{13}{21}\sqrt{6}$ 이다. ……③

이때 점 R에서 직선 $\mathrm{AA'}$에 이르는 거리와 점 Q에서 직선 $\mathrm{AA'}$에 이르는 거리는 같으므로 ②, ③에 의하여 $k=\frac{13}{21}$ 이다.

(ⅰ)이 성립하는 경우, (ⅱ)에 의하여 삼각형 PQR의 평면 IJKLMN 위로의 정사영이 사각형 KLNI을 벗어나므로, 주어진 조건을 만족시키며 정사영의 넓이가 최대가 되게 하는 경우는 (ⅱ)가 된다.

따라서 조건을 만족시키는 선분 AP의 길이는 $\frac{13}{21}$이다.

1. [(ⅰ)과 (ⅱ)의 다른 풀이]

2. 

(ⅰ) 점 $\mathrm{Q'}$이 직선 KL과 직선 $\mathrm{A'U}$의 교점일 때

그림과 같이 점 L을 원점, 직선 US를 x축으로 가지는 좌표평면에서 점 K의 좌표는 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$이므로, 직선 KL의 방정식은

$$y=-\sqrt{3}x$$

이다. 마찬가지로 직선 $\mathrm{UA'}$의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+3\sqrt{2})$$

이므로 두 직선 KL, UA'의 교점 Q'의 좌표는 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$이다.

삼각형의 닮음비를 이용하면 $\frac{\overline{\mathrm{Q'R'}}}{2} : \frac{7\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{7}{\sqrt{6}} - \frac{3\sqrt{6}}{4}\right) : \frac{7}{\sqrt{6}}$이고, 이를 풀면 선분 $\mathrm{Q'R'}$의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

이때 선분 $\mathrm{Q'R'}$의 길이와 선분 QR의 길이는 같고, 선분 AP의 길이를 k라 하면, 선분 $\mathrm{Q'R'}$의 길이는 $3\sqrt{2}k$이다.

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{5}{6}$이다.

(ⅱ) 점 R'이 직선 LN과 직선 $\mathrm{A'S}$의 교점일 때

(ⅰ) 과 같은 좌표평면에서 점 N의 좌표는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$이므로, 직선 LN의 방정식은

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{5}x$$

이다. 마찬가지로 직선 SA'의 방정식은

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 4\sqrt{2})$$

이므로 두 직선 LN, SA'의 교점 R'의 좌표는 $\left(\frac{10\sqrt{2}}{7}, \frac{6\sqrt{6}}{7}\right)$이다.

(ⅰ)과 같이 삼각형의 닮음비를 이용하면 선분 $\mathrm{Q'R'}$의 길이는 $\frac{13\sqrt{2}}{7}$이다.

따라서 선분 AP의 길이는 $\frac{13}{21}$이다.