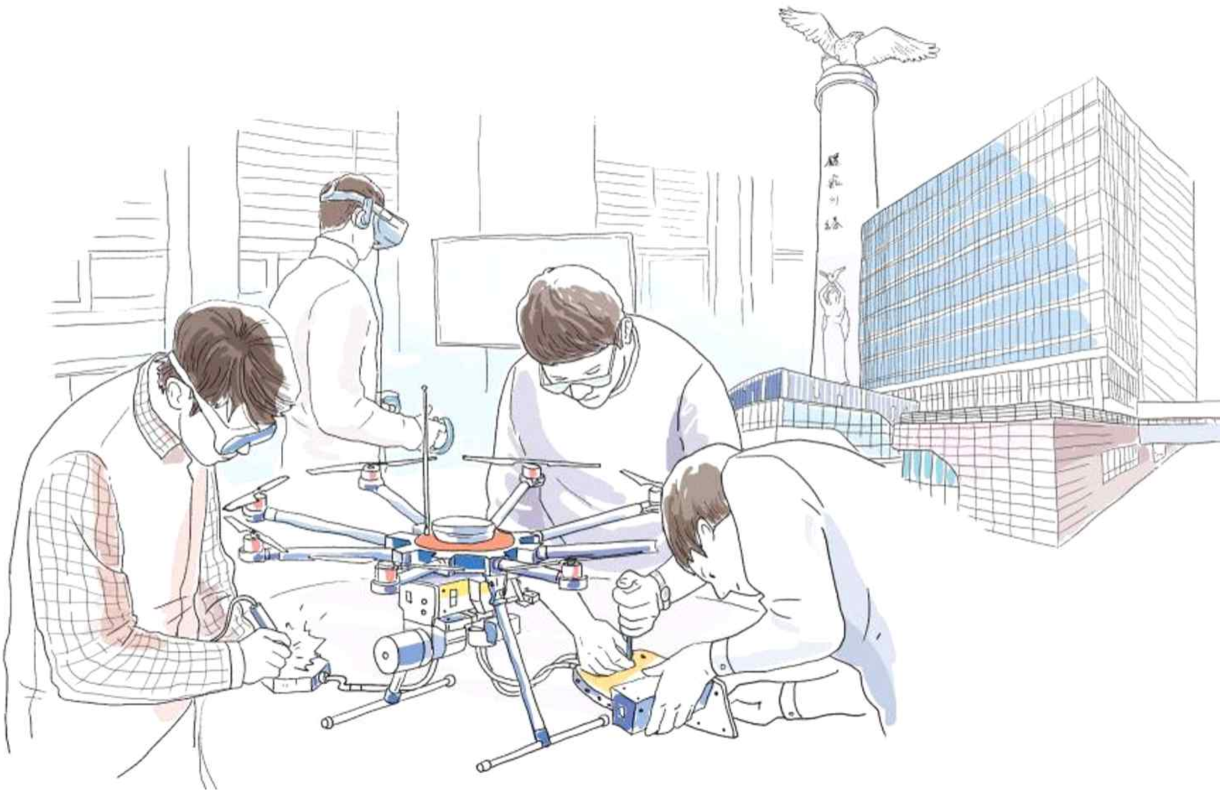
# 2026학년도 수시모집 논술고사
# 채점 기준 및 예시 답안
# - 자연계 -



| 문항카드 4 | 자연계 1번 |
|---|---|

## 1. 출제 의도

본 문항에서는 경우의 수 단원의 핵심 개념인 합의 법칙과 곱의 법칙, 조합을 이해하고 이를 적용하여 다양한 문제 상황에서 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 적절한 전략을 탐색하고 조합을 활용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 찾고, 그 과정을 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 조건을 만족시키는 경우를 모두 고려하고 이를 분석하여 복잡한 상황에서 조합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

## 2. 문항 해설

본 문항은 합의 법칙과 곱의 법칙, 조합을 이용하여 실생활 맥락의 다양한 문제 상황에서 주어진 조건을 만족시키는 경우를 체계적으로 나누어 그 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

## 3. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-1] | B를 연구조에 배정하고 C를 발표조 또는 지원조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 4 |
| | B를 발표조에 배정하고 C를 연구조 또는 지원조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| | B를 지원조에 배정하고 C를 연구조 또는 발표조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| [1-2] | A를 발표조, B를 연구조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| | A가 발표조, B가 연구조에 배정된 하에서 C와 D를 서로 다른 조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 7 |
| | A를 발표조, B를 지원조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| | A가 발표조, B가 지원조에 배정된 하에서 C와 D를 서로 다른 조에 배정하는 경우의 수를 구할 수 있다. | 7 |

## 4. 예시 답안

**[1-1]**

B가 연구조, 발표조, 지원조인 경우로 나누면, 각 경우의 수는 다음과 같다.

| 연구조(4명) | 발표조(3명) | 지원조(3명) | 경우의 수 |
|---|---|---|---|
| B | C | | A 를 연구조 또는 발표조에 배정하여야 하므로<br>${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 + {}_7C_3 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 210 + 140 = 350 \cdots$ ① |
| | | C | A 를 연구조 또는 지원조에 배정하여야 하고,<br>그 경우의 수는 ①과 같으므로 $350$ |
| C | B | | A 를 발표조 또는 연구조에 배정하여야 하고,<br>그 경우의 수는 ①과 같으므로 $350$ |
| | | C | A 를 발표조 또는 지원조에 배정하여야 하므로<br>${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 + {}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 105 + 105 = 210 \cdots$ ② |
| C | | B | A 를 지원조 또는 연구조에 배정하여야 하고,<br>그 경우의 수는 ①과 같으므로 $350$ |
| | C | | A 를 지원조 또는 발표조에 배정하여야 하고,<br>그 경우의 수는 ②와 같으므로 $210$ |

따라서 구하는 경우의 수는 $350 \times 4 + 210 \times 2 = 1820$ 이다.

**[다른 풀이(1)]**

A , B 가 같은 조에 배정되는 경우, C 는 다른 조에 배정하여야 하고 각 경우의 수는 다음과 같다.

| 연구조(4명) | 발표조(3명) | 지원조(3명) | 경우의 수 |
|---|---|---|---|
| A , B | | | 연구조에 C 를 제외한 $2$ 명을 배정하면<br>${}_7C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 21 \times 20 \times 1 = 420$ |
| | A , B | | 발표조에 C 를 제외한 $1$ 명을 배정하면<br>${}_7C_1 \times {}_7C_4 \times {}_3C_3 = 7 \times 35 \times 1 = 245$ |
| | | A , B | 지원조에 C 를 제외한 $1$ 명을 배정하면<br>${}_7C_1 \times {}_7C_4 \times {}_3C_3 = 7 \times 35 \times 1 = 245$ |

A , C 가 같은 조에 배정되는 경우의 수도 위와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times (420 + 245 \times 2) = 1820$ 이다.

**[다른 풀이(2)]**

$10$ 명의 학생이 각 조에 배정되는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_4 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 4200$ 이다. 그 중에서 조건 (가) 또는 조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우의 수를 생각하자.

( i ) 조건 (가)를 만족시키지 못하는 경우

A 가 연구조이면서 B 또는 C 와 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 700$

A 가 발표조이면서 B 또는 C 와 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 735$

A 가 지원조이면서 B 또는 C 와 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 735$

구하는 경우의 수는 $700 + 735 + 735 = 2170$ 이다.

( ii ) 조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우

연구조에 B, C 가 같이 있는 경우의 수: ${}_8C_2 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 560$

발표조에 B, C 가 같이 있는 경우의 수: ${}_8C_4 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 280$

지원조에 B, C 가 같이 있는 경우의 수: ${}_8C_4 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 280$

구하는 경우의 수는 $560 + 280 + 280 = 1120$ 이다.

(ⅲ) 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지 못하는 경우
B, C 가 연구조이고, A 는 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3=420$
B, C 가 발표조이고, A 는 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=245$
B, C 가 지원조이고, A 는 다른 조에 배정되는 경우의 수: ${}_7C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=245$
구하는 경우의 수는 $420+245+245=910$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건 (가) 또는 조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우의 수는 $2170+1120-910=2380$ 이고, 구하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 이를 뺀 것과 같으므로 $4200-2380=1820$ 이다.

**[1-2]**
다음의 두 가지 경우로 나누어 생각하자.
(ⅰ) B 를 연구조에 배정하는 경우
A 를 발표조, B 를 연구조에 배정하는 경우의 수는 ${}_8C_3\times{}_5C_2\times{}_3C_3=560$ 이다.
이 중에서 C, D 를 서로 같은 조에 배정하는 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3+{}_6C_3\times{}_3C_3+{}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60+20+60=140$
구하는 경우의 수는 $560-140=420$ 이다.

(ⅱ) B 를 지원조에 배정하는 경우
A 를 발표조, B 를 지원조에 배정하는 경우의 수는 ${}_8C_4\times{}_4C_2\times{}_2C_2=420$ 이다.
이 중에서 C, D 를 서로 같은 조에 배정하는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2+{}_6C_4\times{}_2C_2+{}_6C_4\times{}_2C_2=90+15+15=120$
구하는 경우의 수는 $420-120=300$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $420+300=720$ 이다.

**[다른 풀이]**
다음의 세 가지 경우로 나누어 생각하자.
(ⅰ) C 를 발표조에 배정하고 D 를 발표조 이외의 조에 배정하는 경우
A 와 C 는 발표조에, B 와 D 는 발표조 이외의 조에 배정하여야 하므로 구하는 경우의 수는 ${}_6C_1\times{}_7C_4\times{}_3C_3=210$
(ⅱ) D 를 발표조에 배정하고 C 를 발표조 이외의 조에 배정하는 경우
해당 경우의 수는 (ⅰ)과 같으므로 구하는 경우의 수는 $210$

(ⅲ) C 와 D 를 모두 발표조 이외의 조에 배정하는 경우
A 는 발표조에, B, C, D 는 발표조 이외의 조에 배정하여야 하므로 발표조를 배정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
발표조에 배정되지 않은 7 명 중에서 4 명을 연구조에, 3 명을 지원조에 배정하는 경우의 수는 ${}_7C_4\times{}_3C_3=35$ 이고,
이 중에서 조건 (다)를 만족시키지 못하는 경우는 다음의 두 경우이다.
(ⅲ-1) C 와 D 가 모두 연구조에 있는 경우
발표조에 배정된 3 명과 C, D 를 제외한 5 명 중에서 연구조에 두 명을 배정하는 경우와 같고, 그 경우의 수는 ${}_5C_2\times{}_3C_3=10$ 이다.
(ⅲ-2) C 와 D 가 모두 지원조에 있는 경우
발표조에 배정된 3 명과 C, D 를 제외한 5 명 중에서 연구조에 네 명을 배정하는 경우와 같고, 그 경우의 수는 ${}_5C_4\times{}_1C_1=5$ 이다.
구하는 경우의 수는 $15\times(35-10-5)=15\times20=300$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $210+210+300=720$ 이다.

| 문항카드 5 | 자연계 2번 |
|---|---|

## 1. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 문제의 조건이 이 함수가 극값을 가질 때임을 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 주어진 조건이 극값을 가질 때임을 파악하고, 특정한 조건에서 극값을 찾을 수 있는지와 삼차함수와 직선의 교점을 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 주어진 조건을 만족할 때 방정식의 두 근의 제곱의 합을 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 그 범위를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

## 2. 문항 해설

본 문항은 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 문제의 조건이 이 함수가 극값을 가질 때임을 파악할 수 있는지를 평가한다. 또한 특정한 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위와 이때 구하고자 하는 값을 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

## 3. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [2-1] | 함수 $g(t)$의 식을 구할 수 있다. | 4 |
| | $p_1$의 값을 구할 수 있다. | 6 |
| | $k$의 값의 합을 구할 수 있다. | 5 |
| [2-2] | $m_k < k < M_k$를 만족시키는 $k$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 8 |
| | ${m_k}^2 + {M_k}^2$을 $k$에 대한 식으로 표현할 수 있다. | 9 |
| | ${m_k}^2 + {M_k}^2$의 최댓값을 구할 수 있다. | 3 |

## 4. 예시 답안

**[2-1]**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나고 점 $\mathrm{P}$에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$t=-\dfrac{p}{2}$일 때, $x=-\dfrac{p}{2}$이고 이때, $g(t)$는 $g(t)=-\dfrac{p}{2}$이다.

$t\neq-\dfrac{p}{2}$일 때, $y=-\dfrac{1}{2t+p}(x-t)+t^2+pt+\dfrac{1}{2}p-\dfrac{1}{2}$이고 이때 $g(t)$는

$g(t)=t+(2t+p)\left(t^2+pt+\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\right)=2t^3+3pt^2+\left(p^2+p\right)t+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p$ 이다.

그러므로 모든 실수 $t$ 에 대하여 $g(t)=2t^3+3pt^2+\left(p^2+p\right)t+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p$ 이다.

$n\left(A_k\right)=2$ 를 만족시키는 $k$ 가 존재하기 위해서는 $g(t)$ 가 극값을 가져야 하고, $g(k)$ 가 극값이 될 때 $n\left(A_k\right)=2$ 가 된다.

$g'(t)=6t^2+6pt+p^2+p$ 이고, $g(t)$ 가 극값을 갖기 위해서는 $g'(t)=0$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

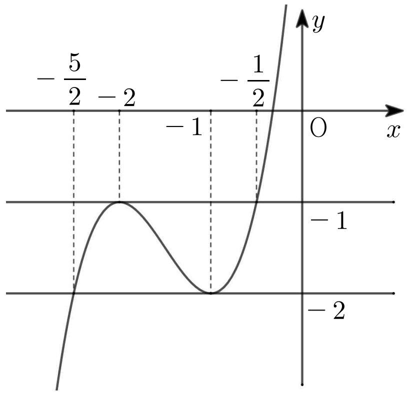
$\frac{D}{4}=9p^2-6\left(p^2+p\right)>0$

$3p(p-2)>0$

$p<0$ 또는 $p>2$

$p$ 는 자연수이므로 $p>2$ 이고, 최소의 자연수 $p_1$ 은 $3$ 이다.

$p=3$ 일 때 $g(t)$ 는 $g(t)=2t^3+9t^2+12t+3$ 이고, $g'(t)=6t^2+18t+12=6(t+1)(t+2)$ 이므로
극값은 $t=-1$ 일 때 $g(-1)=-2$ , $t=-2$ 일 때, $g(-2)=-1$ 이다.




$g(t)=-2$ 에서 $2t^3+9t^2+12t+3=-2$

$2t^3+9t^2+12t+5=0$

$(t+1)^2(2t+5)=0$

그러므로 $g(t)=-2$ 를 만족시키는 $t$ 의 값은 $t=-1$ 또는 $t=-\frac{5}{2}$ 이다.

$g(t)=-1$ 에서 $2t^3+9t^2+12t+3=-1$

$2t^3+9t^2+12t+4=0$

$(t+2)^2(2t+1)=0$

그러므로 $g(t)=-1$ 을 만족시키는 $t$ 의 값은 $t=-2$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 모든 $k$ 의 값은 $-\frac{5}{2},\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2}$ 이고, 모든 $k$의 값의 합은 $-6$ 이다.

**[2-2]**

함수 $f(x)=x^2+x-7$ 에 대하여 $g(t)$ 는

$g(t)=2t^3+3t^2-12t-7$ 이다.

$g(t)=g(k)$ 에서 $2t^3+3t^2-12t-7=2k^3+3k^2-12k-7$

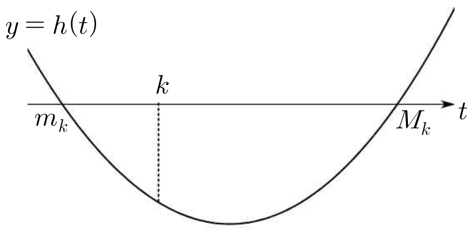
$2\left(t^3-k^3\right)+3\left(t^2-k^2\right)-12(t-k)=0$

$(t-k)\left(2t^2+2kt+2k^2+3t+3k-12\right)=0$

$(t-k)\{2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12\}=0$

$h(t)=2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12$ 라 두면

그림과 같이, $h(k)<0$ 가 되어야 한다.




$h(k)=2k^2+2k^2+3k+2k^2+3k-12=6k^2+6k-12=6(k+2)(k-1)<0$

그러므로 $m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 $k$ 의 값의 범위는 $-2<k<1$ 이다.

또한 $M_k$ 과 $m_k$ 는 $h(t)=2t^2+(2k+3)t+2k^2+3k-12=0$ 의 서로 다른 두 근이 된다.

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$M_k+m_k=-\dfrac{2k+3}{2}$, $M_km_k=\dfrac{2k^2+3k-12}{2}$ 이므로,

${M_k}^2+{m_k}^2=\dfrac{(2k+3)^2}{4}-2\times\dfrac{2k^2+3k-12}{2}=\dfrac{1}{4}\left(-4k^2+57\right)$ 이다.

따라서 $-2<k<1$ 에서 ${M_k}^2+{m_k}^2$ 의 최댓값은 $k=0$ 일 때 $\dfrac{57}{4}$ 이다.

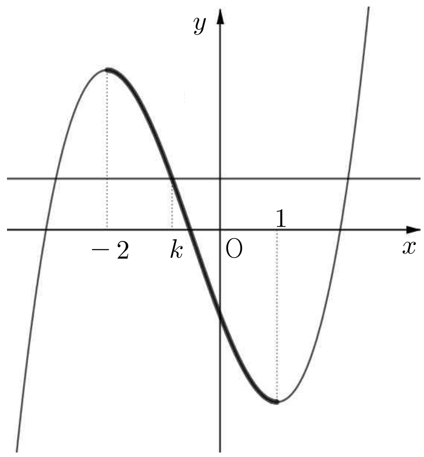
**[다른 풀이] $m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 $k$ 의 값의 범위를 찾는 풀이**

$m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 $k$ 가 존재하기 위해서는 $g(t)$ 가 극값을 가지는 두 개의 $t$ 의 값 사이에 $k$ 가 존재하면 된다.

$g'(t)=6t^2+6t-12$ 이므로

극값은 $t=1$ 일 때와 $t=-2$ 일 때 존재하게 된다.

따라서 $m_k<k<M_k$ 를 만족시키는 $k$ 의 값의 범위는 $-2<k<1$ 이다.



| 문항카드 6 | 자연계 3번 |
|---|---|

## 1. 출제 의도

본 문항에서는 삼각함수, 수열의 극한의 대소 관계, 정적분과 급수의 합 사이의 관계와 관련된 개념들을 이해하고 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[3-1] 삼각함수를 활용하여 $S_1$ 을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] $S_n$ 을 찾고, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값이 주어진 정적분으로 나타낼 수 있음을 수열의 극한의 대소 관계 및 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 활용하여 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

## 2. 문항 해설

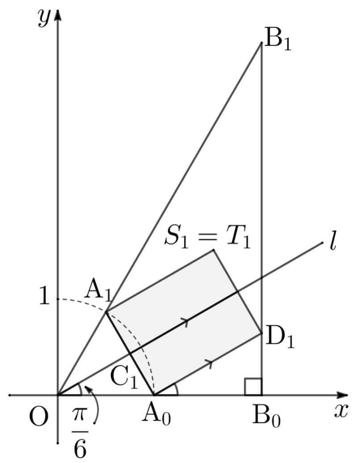
본 문항은 호도법과 삼각함수를 이용하여 주어진 직사각형의 넓이를 변수로 나타낼 수 있는지를 평가한다. 또한 $S_n$ 을 찾고, 수열의 극한의 대소 관계 및 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 활용하여 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값이 주어진 정적분으로 나타낼 수 있음을 보일 수 있는지를 평가한다.

## 3. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [3-1] | 직사각형의 짧은 변의 길이를 구할 수 있다. | 3 |
| | 직사각형의 긴 변의 길이를 구할 수 있다. | 5 |
| | $S_1$ 을 구할 수 있다. | 2 |
| [3-2] | 넓이가 $T_k$ 인 직사각형의 짧은 변의 길이를 $2\sin\frac{\pi}{6n}$ 로 나타낼 수 있다. | 5 |
| | 넓이가 $T_k$ 인 직사각형의 긴 변의 길이를 $\dfrac{2-\cos\frac{(k-1)\pi}{3n}}{\cos\frac{(2k-1)\pi}{6n}}$ 로 나타낼 수 있다. | 5 |
| | 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $T_k$ 를 $2\sin\frac{\pi}{6n}\left\{2\sec\frac{(2k-1)\pi}{6n}-\cos\frac{\pi}{6n}-\sin\frac{\pi}{6n}\tan\frac{(2k-1)\pi}{6n}\right\}$ 로 나타낼 수 있다. | 3 |
| | $\lim_{n\to\infty} 4\sin\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-1)\pi}{6n}=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx$ 임을 보일 수 있다. | 5 |
| | $\lim_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{\pi}{6n}\cos\frac{\pi}{6n}\right)=\frac{\pi}{3}$ 임을 보일 수 있다. | 2 |
| | $\lim_{n\to\infty}\left\{2\sin^2\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{(2k-1)\pi}{6n}\right\}=0$ 임을 보일 수 있다. | 4 |
| | $\lim_{n\to\infty} S_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx-\frac{\pi}{3}$ 임을 보일 수 있다. | 1 |

## 4. 예시 답안

**[3-1]**




$\angle A_0OA_1 = \frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 $A_0OA_1$은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다. 그러므로 $\overline{A_0A_1} = 1$ …… ①

선분 $A_0A_1$의 중점을 $C_1$, 넓이가 $T_1$인 직사각형이 선분 $B_0B_1$과 만나는 점을 $D_1$이라 하면

$\angle A_0OC_1 = \angle B_0A_0D_1$이므로

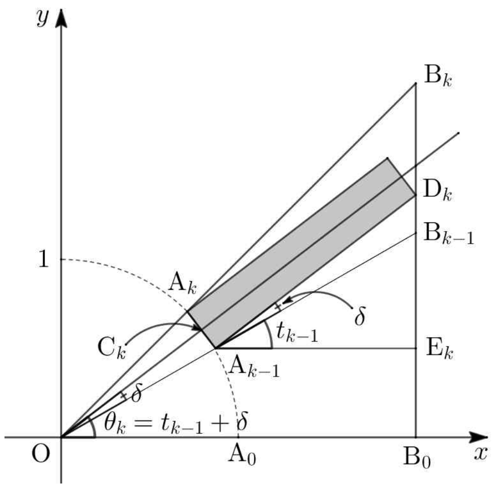
$\angle B_0A_0D_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$이다.

$\overline{A_0D_1} \cos\frac{\pi}{6} = \overline{A_0B_0}$에서

$\overline{A_0D_1} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ …… ②

①, ②에 의하여 $S_1 = T_1 = 1 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

**[3-2]**




선분 $A_{k-1}A_k$의 중점을 $C_k$라 하자. $\angle A_{k-1}OC_k = \delta$라 하면 $\angle A_{k-1}OA_k = \frac{\pi}{3n}$이므로 $\delta = \frac{\pi}{6n}$이다.

$\overline{OA_{k-1}} = 1$이므로 $\overline{A_{k-1}C_k} = \sin\delta$이다. 그러므로 $\overline{A_{k-1}A_k} = 2\sin\delta$ …… ③

$\angle \mathrm{A_0OA}_k = t_k$라 하면 $t_k = \dfrac{k}{3n}$ 이고, $\angle \mathrm{A_0OC}_k = \theta_k$ 라 하면 $t_{k-1} = \theta_k - \delta$ 이다.

한편, 넓이가 $T_k$인 직사각형이 선분 $\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_k$와 만나는 점을 $\mathrm{D}_k$ 라 하면

$\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{D}_k}\cos\theta_k = 2 - \cos t_{k-1}$ 에서

$$\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{D}_k} = \frac{2-\cos t_{k-1}}{\cos\theta_k} = \frac{2-\cos(\theta_k - \delta)}{\cos\theta_k} = 2\sec\theta_k - \frac{\cos\theta_k\cos\delta + \sin\theta_k\sin\delta}{\cos\theta_k} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

③, ④에 의하여

$$T_k = 2\sin\delta\left(2\sec\theta_k - \frac{\cos\theta_k\cos\delta + \sin\theta_k\sin\delta}{\cos\theta_k}\right)$$

$$= 2\sin\delta(2\sec\theta_k - \cos\delta - \sin\delta\tan\theta_k)$$

이므로

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{2\sin\delta(2\sec\theta_k - \cos\delta - \sin\delta\tan\theta_k)\}$$

$$= 4\sin\delta\sum_{k=1}^{n}\sec\theta_k - 2n\sin\delta\cos\delta - 2\sin^2\delta\sum_{k=1}^{n}\tan\theta_k$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 의 값을 항별로 나누어 구하자.

( i ) $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sin\delta\sum\limits_{k=1}^{n}\sec\theta_k$의 값을 구하면

함수 $y = \sec x$는 $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$에서 증가하므로

$$\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-2)\pi}{6n} \le \sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-1)\pi}{6n} \le \sum_{k=1}^{n}\sec\frac{2k\pi}{6n} \text{에서}$$

$$4\sin\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-2)\pi}{6n} \le 4\sin\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-1)\pi}{6n} \le 4\sin\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{2k\pi}{6n} \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sin\dfrac{\pi}{6n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sec\dfrac{(2k-2)\pi}{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sec\dfrac{(k-1)\pi}{3n}\times\dfrac{\pi}{3n}$이고

함수 $y = \sec x$는 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$에서 연속이므로 $x_k = \dfrac{(k-1)\pi}{3n}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{3n}$로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(k-1)\pi}{3n}\times\frac{\pi}{3n} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

또한 $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sin\dfrac{\pi}{6n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sec\dfrac{2k\pi}{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sec\dfrac{k\pi}{3n}\times\dfrac{\pi}{3n}$이고

함수 $y = \sec x$는 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$에서 연속이므로 $x_k = \dfrac{k\pi}{3n}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{3n}$로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{k\pi}{3n}\times\frac{\pi}{3n} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx \quad \cdots\cdots \text{⑦}$$

이므로 ⑤, ⑥, ⑦에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} 4\sin\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\sec\frac{(2k-1)\pi}{6n} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx$$

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty}(2n\sin\delta\cos\delta)$의 값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{\pi}{6n}\cos\frac{\pi}{6n}\right) = \frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\times\cos\frac{\pi}{6n}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(ⅲ) $\lim_{n\to\infty}\left(2\sin^2\delta\sum_{k=1}^{n}\tan\theta_k\right)$의 값을 구하면

$0 \le tan\frac{(2k-1)\pi}{6n} \le \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}\tan\frac{(2k-1)\pi}{6n} \le \sqrt{3}\,n$$

$0 \le 2\sin^2\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{(2k-1)\pi}{6n} \le 2\sqrt{3}\,n\sin^2\frac{\pi}{6n}$ 이고,

$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{3}\,n\sin^2\frac{\pi}{6n}\right) = \lim_{n\to\infty}2\sqrt{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{\pi}{6n}}\right)^2\left(\frac{\pi}{6n}\right)^2 n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2\sin^2\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{(2k-1)\pi}{6n}\right\} = 0$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}S_n = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec x\,dx - \frac{\pi}{3}$이다.