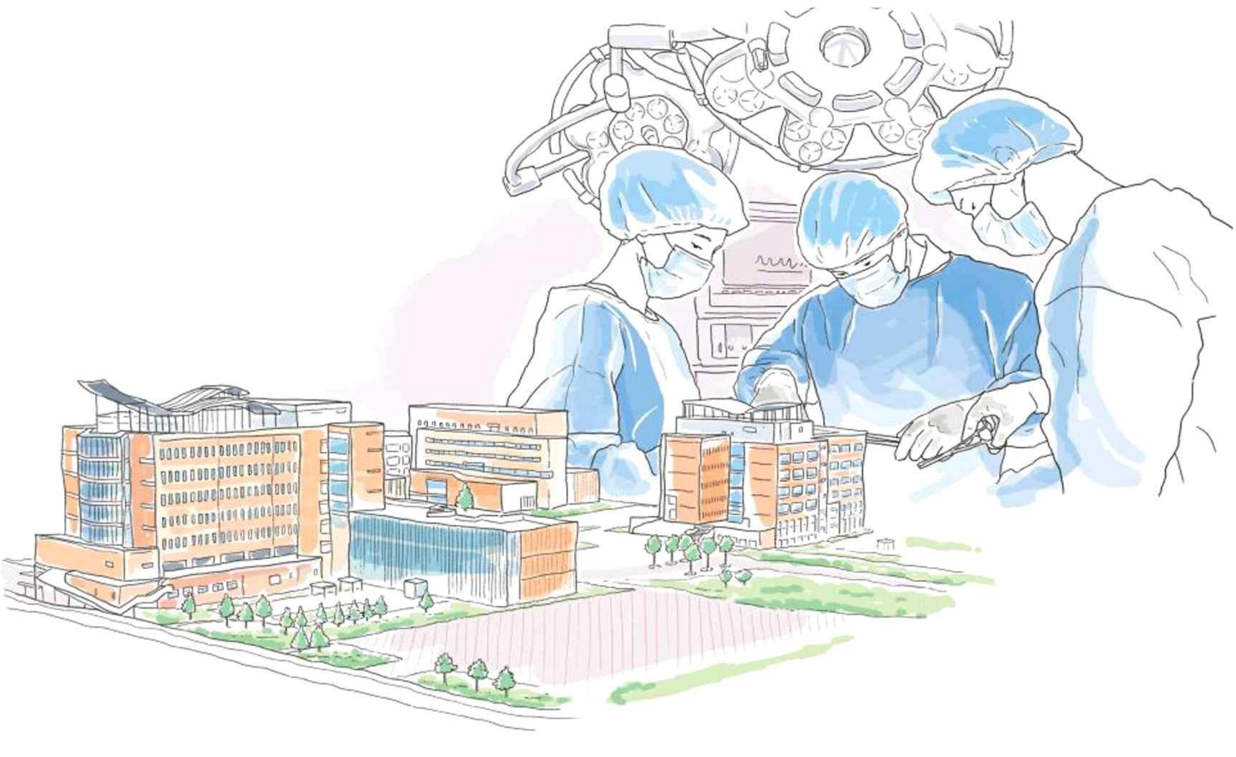
2025학년도 수시모집 논술고사
채점 기준 및 예시 답안
- 의·약학계 -



문항 번호	의·약학계 1번

• 출제 의도

본 문항에서는 정적분과 미분의 관계와 다항함수의 성질을 활용하여 조건을 만족하는 다항함수를 찾을 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 미분계수의 정의를 이용하여 원하는 미분계수를 구하고, 정적분과 미분의 관계, 다항함수의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 조건과 정적분과 미분의 관계를 이용하여 상수 a의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-3] 조건을 만족하는 다항함수를 찾고 그 함수의 함숫값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 미분계수의 정의를 이용하여 다항함수의 극값을 구하고, 극값을 갖는 x의 값을 이용하여 도함수의 부호를 결정할 수 있는지를 평가한다. 또한 그 과정에서 결정된 도함수의 부호와 정적분과 미분의 관계를 통하여 도함수에 관한 식을 세우고 다항함수의 적분을 통해 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(-1)=g(-1)=-18$ 임을 보일 수 있다.	2
	$f'(-1)=0$ 임을 보일 수 있다.	3
	$f'(x)=kx(x+1)(x-a)$ (k는 $k>0$인 상수)임을 이용하여 $-1<x<0$일 때, $f'(x)>0$ 임을 보일 수 있다.	3
	$f(0)=-13$ 임을 보일 수 있다.	2
[1-2]	$f(1)=-26$ 임을 보일 수 있다.	3
	$f(0)=-13$ 임을 이용하여 $f(x)=k\left\{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(1-a)x^3-\frac{1}{2}ax^2\right\}-13$의 형태임을 보일 수 있다.	3
	$f(-1)=-18$임을 이용하여 $\frac{k}{12}(-1-2a)=-5$ 의 형태임을 보일 수 있다.	3

	$f(1)=-26$ 임을 이용하여 $\frac{k}{12}(7-10a)=-13$ 의 형태임을 보일 수 있다.	3
	$a=2$ 임을 보일 수 있다.	3
[1-3]	$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2-13$ 임을 보일 수 있다.	2
	$g(a+1)-2g(a-1)=78$ 임을 보일 수 있다.	3

• 예시 답안

[1-1]

$x>-1$ 에서 $g'(x)=|f'(x)|\geq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x>-1$ 에서 증가하는 함수이다.
실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}g(x)=g(-1)=-18$$

이다. 따라서 $f(-1)=g(-1)=-18$ …… ㉠

조건 (가), (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq -18$, $g(-1)=-18$ 이므로
$g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값을 가지고 $g'(-1)=0$ 이다. 또한

$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\\&=\lim_{x\to -1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\\&=g'(-1)\end{aligned}$$

이므로 $g'(-1)=0$ 에서 $f'(-1)=0$ 이다.

$x>-1$ 에서 $g'(x)=|f'(x)|$ 이므로
$g'(0)=|f'(0)|=0$, $g'(a)=|f'(a)|=0$ 이 되어 $f'(0)=f'(a)=0$ 이다.
사차함수 $f(x)$는 $x<-1$ 에서 $f(x)=g(x)\geq -18$ 이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고
$f'(-1)=f'(0)=f'(a)=0\ (a>1)$ 에 의하여 함수 $f'(x)$를

$$f'(x)=kx(x+1)(x-a)\ (k\text{는 } k>0\text{인 상수})$$

로 놓을 수 있다.
$-1<x<0$, $x>a$ 일 때, $f'(x)>0$ …… ㉡
$x<-1$, $0<x<a$ 일 때, $f'(x)<0$ …… ㉢

제시문 [Ⅱ]와 ㉠, ㉡에 의하여

$$g(0)=g(-1)+\int_{-1}^{0}|f'(t)|dt$$

$$= g(-1) + \int_{-1}^{0} f'(t)dt$$

$$= g(-1) + f(0) - f(-1)$$

$$= f(0)$$

조건 (다)에서 $g(0) = -13$ 이므로 $f(0) = -13$ …… ㉣

[1-2]

$g(1) = \int_{1}^{1} |f'(t)|dt = 0$이고 ㉡, ㉢에 의하여

$$g(1) = g(0) + \int_{0}^{1} |f'(t)|dt$$

$$= g(0) - \int_{0}^{1} f'(t)dt$$

$$= g(0) - \{f(1) - f(0)\}$$

$$= g(0) + f(0) - f(1)$$

$$= -26 - f(1)$$

에서 $f(1) = -26$ …… ㉤

이제 위의 사실을 이용하여 $f(x)$ 를 구하자.

$f'(x) = kx(x+1)(x-a)$ 이고 ㉣에 의하여

$$f(x) = f(0) + \int_{0}^{x} f'(t)dt$$

$$= -13 + \int_{0}^{x} kt(t+1)(t-a)dt$$

$$= k\left\{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(1-a)x^3 - \frac{1}{2}ax^2\right\} - 13$$

㉠, ㉤에 의하여

$$f(-1) = k\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(1-a) - \frac{1}{2}a\right\} - 13$$

$$= \frac{k}{12}(-1-2a) - 13$$

$$= -18$$

$$f(1) = k\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}(1-a) - \frac{1}{2}a\right\} - 13$$

$$= \frac{k}{12}(7-10a) - 13$$

$$= -26$$

이고 $\frac{k}{12}(-1-2a) = -5$, $\frac{k}{12}(7-10a) = -13$ 에서 $k = 12$, $a = 2$ 이다.

[1-3]

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2-13$ 이고

$f(1)=-26$, $f(2)=-45$, $f(3)=14$, $g(1)=\int_1^1 |f'(t)|dt=0$ 이다.

따라서

$$
\begin{aligned}
g(a+1)-2g(a-1) &= g(3)-2g(1)=g(3)-0 \\
&= \int_1^3 |f'(t)|dt \\
&= \int_1^2 |f'(t)|dt+\int_2^3 |f'(t)|dt \\
&= -\int_1^2 f'(t)dt+\int_2^3 f'(t)dt \\
&= -\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\} \\
&= f(1)+f(3)-2f(2) \\
&= -26+14-2\times(-45) \\
&= 78
\end{aligned}
$$

문항 번호	의·약학계 2번

• 출제 의도

본 문항에서는 원 위의 점을 삼각함수로 나타내고, 내접하는 정사각형과 정삼각형의 공통부분인 $S(\theta)$의 넓이를 구하는 과정에서 요구되는 식이 d_1과 d_2임을 알고, 각각의 함수 $S(\theta)$를 구한 후 극한값의 존재성을 판정할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 주어진 d_1과 d_2가 주어진 θ에 대한 식과 같음을 삼각함수를 활용하여 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] [2-1]에 제시된 d_1과 d_2를 이용하여 [그림1], [그림2]의 각 함수 $S(\theta)$를 각각 θ에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} S'(\theta)$의 존재성을 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 삼각함수의 성질과 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 주어진 거리의 값들을 찾을 수 있는지를 평가한다. 또한 주어진 거리를 이용하여 각 상황에 맞는 삼각형, 사각형의 넓이를 식으로 나타낸 후 도함수를 찾고 극한값의 존재 여부를 파악할 수 있는지를 평가한다.

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	점과 직선 사이의 거리를 이용하여 d_1을 표현할 수 있다.	6
	$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right)$임을 보일 수 있다.	4
	$d_2 = \left\|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\|$ 임을 보일 수 있다.	10
[2-2]	직선 $\mathrm{PP_3}$과 직선 직선 $\mathrm{Q_1Q_2}$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$임을 보일 수 있다.	2
	$\frac{\pi}{6} < \theta \le \frac{\pi}{3}$의 경우 $S(\theta)$를 구할 수 있다.	5
	직각삼각형 RPT의 넓이와 $\frac{\pi}{9} \le \theta < \frac{\pi}{6}$인 경우 $S(\theta)$를 구할 수 있다.	8

	$S'(\theta)$를 구하고 이를 이용하여 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} S'(\theta)$가 존재함을 보일 수 있다.	5

• **예시 답안**

[2-1]

우선 d_1을 구하자. 두 점 P와 P_3의 좌표는

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathrm{P}_3\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta)$$

이므로 직선 PP_3의 방정식은 $(\cos\theta + \sin\theta)x - (\cos\theta - \sin\theta)y - 1 = 0$

이다.

한편, 점 Q_1의 좌표가

$$\left(1 + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, -\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

이므로 점 Q_1과 직선 PP_3사이의 거리 d_1을 구하면,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\left|(\cos\theta + \sin\theta)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) - (\cos\theta - \sin\theta)\left(-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) - 1\right|}{\sqrt{(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2}} \\ &= \frac{\left|\cos\theta + \sin\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta - 1\right|}{\sqrt{(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) + (\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\cos\theta + \sin\theta - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right) \end{aligned}$$

이다.

다음으로 d_2를 구하자. 선분 PQ의 길이는 1이고 $\angle\mathrm{AQQ}_1 = \frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{AQP} = \theta$이므로

[그림1]의 경우는 $\angle\mathrm{PQQ}_1 = \frac{\pi}{6} - \theta$이고 [그림2]의 경우는 $\angle\mathrm{PQQ}_1 = \theta - \frac{\pi}{6}$이다.

따라서 $d_2 = \left|\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right|$이다.

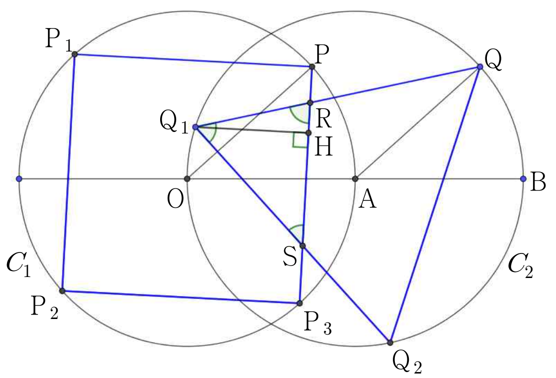
[2-2]

우선 두 개의 그림 모두에서 직선 $\mathrm{PP_3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta+\frac{\pi}{4}$이고, 직선 $\mathrm{Q_1Q_2}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\angle \mathrm{PSQ_1}=\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

임을 확인할 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{6}<\theta\le\frac{\pi}{3}$인 경우 [그림2]에서 $\triangle \mathrm{Q_1RS}$의 넓이 $S(\theta)$를 구하자.



$\angle \mathrm{RSQ_1}=\frac{\pi}{4}$이고 점 $\mathrm{Q_1}$에서 $\overline{\mathrm{PP_3}}$의 수선의 발을 H라 하면 $\triangle \mathrm{Q_1HS}$는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $\angle \mathrm{HQ_1R}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$이고, 제시문 [I]에 의해

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

이다.

$\overline{\mathrm{Q_1H}}=d_1$이므로

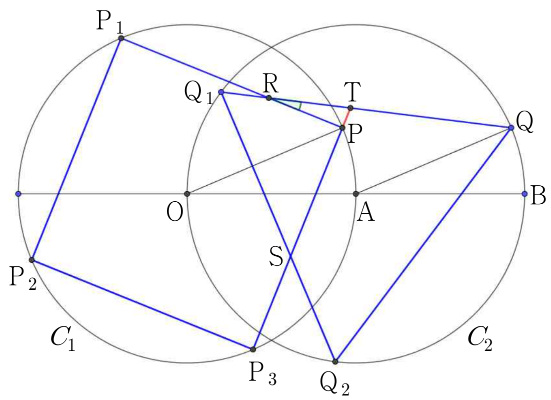
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RS}}\times\overline{\mathrm{Q_1H}}=\frac{1}{2}\times\left(d_1+d_1\tan\frac{\pi}{12}\right)\times d_1=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})d_1{}^2$$

이고, [2-1]의 d_1에 의해

$$S(\theta)=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\cos\theta-\sin\theta\right)^2\quad\left(\frac{\pi}{6}<\theta\le\frac{\pi}{3}\right)$$

이다.

(ii) $\frac{\pi}{9}\le\theta<\frac{\pi}{6}$인 경우 [그림1]에서 사각형 $\mathrm{Q_1SPR}$의 넓이 $S(\theta)$를 구하자.



직선 $\mathrm{PP_3}$가 $\overline{\mathrm{QQ_1}}$와 만나는 점을 T라 하자.

사각형 $\mathrm{Q_1SPR}$의 넓이 $S(\theta)$는 $\triangle \mathrm{Q_1ST}$의 넓이에서 $\triangle \mathrm{RPT}$의 넓이를 뺀 값이다.

먼저, 직각삼각형 RPT에서 $\angle \mathrm{PRT} = \frac{\pi}{12}$, $\angle \mathrm{PTR} = \frac{5}{12}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{RP}} \times \sin\frac{\pi}{12} = d_2$, $\overline{\mathrm{PT}} \times \sin\frac{5}{12}\pi = d_2$이고, 제시문 [I]에 의해

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \qquad \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

이므로 [2-1]의 d_2를 적용하여 직각삼각형 RPT의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times \frac{d_2}{\cos\frac{5}{12}\pi} \times \frac{d_2}{\cos\frac{\pi}{12}} = 2{d_2}^2 = 2\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

이다.

이때 $\triangle \mathrm{Q_1ST}$의 넓이는 (i)에서 구한 $\triangle \mathrm{Q_1RS}$의 넓이와 같은 식으로 표현되고,

$\triangle \mathrm{Q_1ST}$의 넓이는 $\frac{3 - \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right)^2$이므로

$$S(\theta) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right)^2 - 2\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{9} \leq \theta < \frac{\pi}{6}\right)$$

이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right)^2 - 2\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{\pi}{9} \leq \theta < \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right)^2 & \left(\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

이다. 한편,

$$S'(\theta) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right) \times (\sin\theta - \cos\theta) - 4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{\pi}{9} < \theta < \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \cos\theta - \sin\theta\right) \times (\sin\theta - \cos\theta) & \left(\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

이고, 따라서 $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} S'(\theta) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}$, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{6}+} S'(\theta) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}$이므로

제시문 [Ⅱ]에 의해 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} S'(\theta)$의 값은 존재하고 그 값은 $\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$이다.

[2-1 다른 풀이]

우선 d_1을 구하자. [그림1]의 경우 직선 $\mathrm{PP_3}$가 $\overline{\mathrm{QQ_1}}$와 만나는 점을 T라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\angle \mathrm{QTP} = \frac{7}{12}\pi$, $\angle \mathrm{TPQ} = \theta + \frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{QQ_1}} = \sqrt{3}$이고, $\triangle \mathrm{TPQ}$에서 사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{TQ}} = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}, \qquad \overline{\mathrm{TQ_1}} = \sqrt{3} - \overline{\mathrm{TQ}} = \sqrt{3} - \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}$$

이므로

$$d_1 = \overline{\mathrm{TQ_1}} \times \cos\frac{\pi}{12} = \left(\sqrt{3} - \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}\right) \times \sin\frac{7}{12}\pi = \sqrt{3}\sin\frac{7}{12}\pi - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \sin\theta - \cos\theta\right)$$

[그림2]의 경우 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\angle \mathrm{PRQ} = \frac{5}{12}\pi$, $\angle \mathrm{QPR} = \frac{3}{4}\pi - \theta$, $\overline{\mathrm{QQ_1}} = \sqrt{3}$이고, $\triangle \mathrm{PQR}$에서 사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{RQ}} = \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}{\sin\frac{5}{12}\pi} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}, \qquad \overline{\mathrm{RQ_1}} = \sqrt{3} - \overline{\mathrm{RQ}} = \sqrt{3} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}$$

이므로 위와 같이 계산하면

$$d_1 = \overline{\mathrm{RQ_1}} \times \cos\frac{\pi}{12} = \left(\sqrt{3} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\frac{7}{12}\pi}\right) \times \sin\frac{7}{12}\pi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \sin\theta - \cos\theta\right)$$

다음으로 d_2를 구하자. $\overline{\mathrm{QQ_1}}$의 중점의 좌표를 Q'이라 하면 점 Q'은 점 $\mathrm{A}(1,0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 위의 점으로 직선 AQ'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta+\frac{\pi}{3}$이다.

$$\mathrm{Q}'\left(1+\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right), \frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

직선 $\mathrm{QQ_1}$ 은 기울기가 $-\dfrac{1}{\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}$ 이고, 점 Q' 을 지나므로

$$y=-\frac{1}{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\left\{x-1-\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$x+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\times y-1-\frac{1}{2}\sec\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 에서 직선 ㉠까지의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2=\frac{\left|\cos\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\theta-1-\frac{1}{2}\sec\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|}{\sqrt{1+\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$=\left|\cos\theta\times\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\theta\times\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|\cos\left\{\theta-\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right|=\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

문항 번호	의·약학계 3번

• 출제 의도

본 문항에서는 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배, 내적 등의 다양한 연산을 활용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치관계를 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[3-1] 두 벡터의 내적이 0일 때와 한 벡터가 다른 벡터의 실수배일 때의 두 벡터의 위치관계를 파악하고, 이를 만족시키지 않기 위한 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 주어진 조건을 만족시키는 점의 위치를 두 직선의 교점으로 파악한 후 그 점의 위치에 따라 제시된 두 벡터의 합이 변화됨을 파악하고, 그 크기의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

• 문항 해설

본 문항은 벡터의 내적이 0일 때와 한 벡터가 다른 벡터의 실수배일 때의 두 벡터의 위치관계를 파악할 수 있으며, 주어진 상황을 만족시키지 않을 때와 만족시킬 때의 점의 위치는 어떠한 관계가 있음을 해석할 수 있는지를 평가한다..

• 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	조건을 만족시키는 점 Q가 존재한다면 점 Q가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 위에 있음을 보일 수 있다.	5
	점 Q의 개수가 0이 되도록 하는 점 P에 대한 직선 AP의 방정식을 구할 수 있다.	6
	주어진 조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	4
[3-2]	주어진 조건을 만족시키는 점 P에 대해 변수를 사용하여 점 Q의 좌표를 나타낼 수 있다.	6
	벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 크기를 식으로 나타낼 수 있다.	3
	$\left\vert\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right\vert$의 최솟값을 구할 수 있다.	6

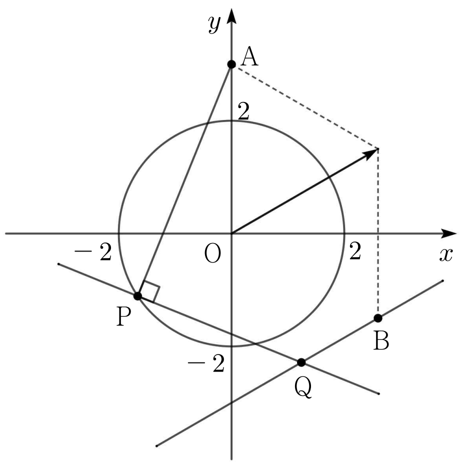
- **예시 답안**

[3-1]

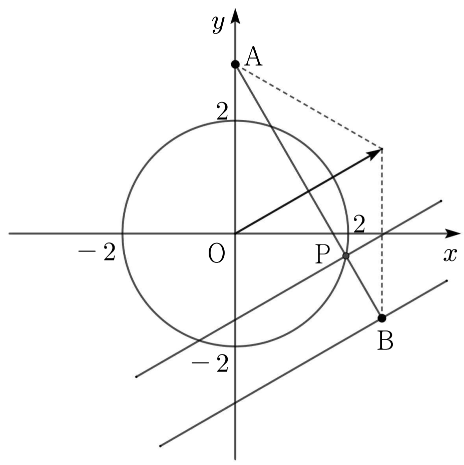
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{BQ}$ ……㉠을 만족시키는 점 Q가 존재한다는 것은 $\overrightarrow{BQ}$가 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$와 평행이므로 점 Q는 점 B를 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선 위에 존재한다는 것이다. 즉, 점 Q는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 위에 존재한다.

이때 점 Q가 점 B와 같아지면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이 되므로 이러한 조건을 만족시키는 점 P는 존재하지 않으며, 점 Q는 점 B가 아니다.

또한 ㉠을 만족시키는 점 Q의 개수가 0이 되어야 하므로 조건 (나)를 만족시키는 점 Q는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 위에 존재하지 않아야 한다. 따라서 $\overrightarrow{PQ}$는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$과 평행하고, 조건 (나)에 의해 $\overrightarrow{AP}$는 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$과 수직이다. 즉, 두 점 A와 P를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x+3$ 이다.



<조건을 만족시키는 점 Q가 존재하는 경우>



<조건을 만족시키는 점 Q의 개수가 0인 경우>

이때 $P(a,b)$라 하면, $\overrightarrow{AP}=(a,b-3)$이므로 $\frac{b-3}{a}=-\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}a+3$이고 조건 (가)에 의해 $a^2+b^2=4$이므로

$$a^2+(-\sqrt{3}a+3)^2=4$$
$$4a^2-6\sqrt{3}a+5=0$$
$$a=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{27-20}}{4}=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{4}$$

이다.

따라서 점 P는 $\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}, \frac{3-\sqrt{21}}{4}\right)$ 또는 $\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4}, \frac{3+\sqrt{21}}{4}\right)$ 이다.

[3-2]

점 Q는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 위에 존재한다. ······ⓛ

이때 점 $\mathrm{P}(a,b)$라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a,b-3)$는 직선 PQ의 법선벡터가 되므로 직선 PQ는

$$a(x-a)+(b-3)(y-b)=0$$

$$y=\frac{a}{3-b}(x-a)+b$$

이다.

ⓛ에 의해 점 Q는 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$ 위에도 존재하므로 점 Q의 x좌표를 t라 하면

$$\frac{a}{3-b}(t-a)+b=\frac{\sqrt{3}}{3}t-3$$

이 성립한다.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3-b}\right)t=\frac{-a^2}{3-b}+b+3$$

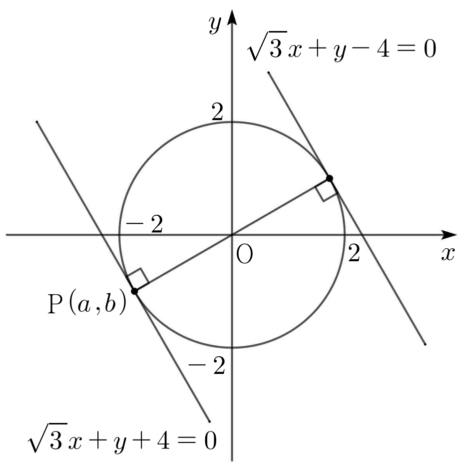
$$(3-b-\sqrt{3}a)t=\sqrt{3}\{-a^2+(b+3)(3-b)\}=\sqrt{3}\{9-(a^2+b^2)\}=5\sqrt{3}$$

$$t=\frac{5\sqrt{3}}{3-b-\sqrt{3}a} \quad \cdots\cdots ⓒ$$

이때, 점 Q는 $\left(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t-3\right)$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\left|\left(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|t|$ 이다.

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 최소가 되도록 하는 점 Q의 좌표는 ⓒ에 의해 $|3-b-\sqrt{3}a|$의 값이 최대일 때이다.

$3-b-\sqrt{3}a=d$라 하면, $a^2+b^2=4$를 만족시키므로 $(0,0)$과 $\sqrt{3}x+y+d-3=0$ 사이의 거리가 2일 때, d는 최댓값과 최솟값을 가진다.



$\frac{|d-3|}{\sqrt{3+1}}=2$일 때, $d=-1$ 또는 $d=7$이므로 $|d|$의 최댓값은 7이다.

따라서 $|t|$의 최솟값은 $\frac{5\sqrt{3}}{7}$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{7}=\frac{10}{7}$이다.